ANNAES SCIENTIFICOS

DA

ACADEMIA POLYTECHNICA

DO

PORTO

ANNAES SCIENTIFICOS

DA

ACADEMIA POLYTECNICA

DO

PORTO

PUBLICADOS SOB A DIRECÇAO

DE

F. Gomes Teixeira

VOLUME I

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1905

A Academia Polytechnica do Porto, auctorizada por Portaria de 5 de maio de 1905, inicia hoje a publicação de uma Revista consagrada ás sciencias professadas neste estabelecimento de ensino, isto é, ás Mathematicas puras e applicadas, á Physica, á Chimica, á Historia Natural, ás Sciencias Sociaes, etc. Nesta Revista serão publicados artigos scientificos, didacticos e pedagogicos, monographias sobre capitulos das sciencias mencionadas pouco conhecidos no nosso paiz, noticias sobre o estado actual de ramos ou capitulos das mesmas sciencias, etc.

Será admittida nestes Annaes a collaboração dos homens de sciencia do nosso paiz e do extrangeiro que quizerem recorrer a elles para a publicação dos seus trabalhos.

Os *Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto* substituem, na parte relativa ás Mathematicas, o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, cuja publicação termina. Esperamos que os geometras, que collaboraram neste jornal, honrarão com os seus trabalhos esta nova Revista.

SOBRE UMA QUESTÃO ENTRE MONTEIRO DA ROCHA E ANASTACIO DA CUNHA

POR

F. GOMES TEIXEIRA

1. Na lista dos mathematicos notaveis que teve Portugal no seculo XVIII, occupam o logar primordial José Monteiro da Rocha e José Anastacio da Cunha. Foram ambos lentes na Universidade de Coimbra na occasião da celebre reforma d'esta grande instituição pelo Marquez de Pombal e foram ambos considerados pelos seus contemporaneos como homens de grande valor, conceito que a historia da sciencia portugueza confirmou. Este valor, só elles, inimigos irreconciliaveis, o não reconheciam um ao outro; e porisso quem formasse opinião a respeito d'elles pelo que cada um dizia do seu adversario, faria d'ambos juizo bem injusto.

Com o titulo de *Questão entre José Anastacio da Cunha* e *José Monteiro da Rocha* publicou o Dr. Antonio José Teixeira nos volumes XXXVIII e XXXIX do *Instituto* de Coimbra, em 1890 a 1892, um trabalho cheio de interesse, onde apresentou alguns escriptos [1] d'estes illustres geometras, nos quaes dirigem um

---

[1] Os escriptos considerados são: uma carta de Anastacio da Cunha dirigida a João Manoel d'Abreu, que fôra seu discipulo e que traduzira para francez os seus *Principios mathematicos;* a resposta de Monteiro da Rocha ás accusações que nella lhe foram feitas e a réplica de Anastacio da Cunha.

ao outro asperas censuras, algumas das quaes se referem ao modo de considerar certos assumptos scientificos, esclarecendo-os com commentarios muito instructivos. Entre estes assumptos figura porém um, a respeito do qual o intelligente e erudito auctor do trabalho mencionado não deu a sua opinião, e é d'esse que vamos aqui occupar-nos.

2. Uma das censuras que Anastacio da Cunha dirigiu a Monteiro da Rocha refere-se a uma emenda que este ultimo julgou dever fazer a uma passagem da Mecanica do Padre Marie, em uma traducção que publicou d'esta obra, com o fim de servir de livro de texto para o ensino d'esta sciencia na Universidade.

Occupando-se da *catenaria* correspondente ao caso em que o fio que fórma esta curva é solicitado por forças de attracção, dirigidas para um centro fixo, actuando na razão inversa do quadrado das distancias a este centro, Marie mostrou, por processos que aqui não exporemos, que a curva póde ser representada pelas equações [1]

$$x = z\cos(\theta - \varphi),\ y = z\,\mathrm{sen}\,(\theta - \varphi),$$

onde

$$(1) \qquad z = \frac{1 - m^2}{2} + \frac{1 + m^2}{2}\cos\frac{2m}{1 + m^2}\varphi,$$

$$m^2 = \frac{b + a}{b - a},$$

quando $b > a$. Quando é $b < a$, obtém-se uma outra relação entre z e φ, onde entram logarithmos, que aqui não escreveremos, por não ter de fazer uso d'ella.

Nas egualdades precedentes θ, a e b representam quanti-

[1] Veja-se a demonstração d'este resultado e a significação d'estas lettras no t. XXXVIII, p. 816 a 820, do *Instituto*. Sobre a significação da lettra θ, não empregada por Marie, veja-se o t. XXXIX, p. 490 a 497, do mesmo jornal.

dades constantes e z o vector do ponto cujas coordenadas são (x, y).

Depois de obter as equações da catenaria considerada, acrescentou Marie que, se fôr $b > a$ e se m fôr um numero inteiro, a curva é *algebrica;* mas Monteiro da Rocha, que traduziu esta passagem, sem a alterar, julgou dever emenda-la nas erratas, que junctou ao livro, substituindo m por $m + \frac{1}{m}$. É a esta substituição que se refere a critica de Anastacio da Cunha.

O illustre commentador do escripto de Anastacio da Cunha a que nos estamos referindo, diz na pag. 490 do t. XXXIX do *Instituto* que vae examinar esta critica com attenção; preoccupado porém com outros trabalhos, interrompeu a publicação do que se refere a este assumpto e infelizmente falleceu antes de o terminar. Julgamos porisso que não será inutil examinar aqui esta questão, bem facil aliás de resolver.

3. Ponha-se, para isso,

$$\frac{2m}{1+m^2} = \frac{\alpha}{\beta},$$

α e β representando dois numeros inteiros.

Applicando as fórmulas bem conhecidas, dadas por Euler na sua *Introductio in Analysin infinitorum:*

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \cos k\omega = \frac{1}{2} \Big\{ & (2\cos\omega)^k - \frac{k}{1}(2\cos\omega)^{k-2} \\ & + \frac{k(k-3)}{1 \cdot 2}(2\cos\omega)^{k-4} - \ldots \Big\}, \end{aligned} \right.$$

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen} k\omega = \operatorname{sen}\omega \Big\{ & (2\cos\omega)^{k-1} - \frac{k-2}{1}(\cos\omega)^{k-3} \\ & + \frac{(k-3)(k-5)}{1 \cdot 2}(2\cos\omega)^{k-5} - \ldots \Big\}, \end{aligned} \right.$$

temos, pondo primeiramente $k = \alpha$, $\omega = \dfrac{\varphi}{\beta}$,

$$\cos \alpha \frac{\varphi}{\beta} = \frac{1}{2} \left\{ \left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\alpha} - \frac{\alpha}{1} \left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\alpha-2} \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha(\alpha-3)}{1.2} \left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\alpha-4} - \ldots \right\},$$

e depois, pondo $k = \beta$, $\omega = \dfrac{\varphi}{\beta}$,

$$\operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} \beta \frac{\varphi}{\beta} = \operatorname{sen} \frac{\varphi}{\beta} \left\{ \left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\beta-1} - \frac{\beta-2}{1} \left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\beta-3} \right.$$

$$\left. + \frac{(\beta-3)(\beta-5)}{1.2} \left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\beta-5} - \ldots \right\},$$

$$\cos \varphi = \cos \beta \frac{\varphi}{\beta} = \frac{1}{2} \left\{ \left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\beta} - \frac{\beta}{1} \left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\beta-2} \right.$$

$$\left. + \frac{\beta(\beta-3)}{1.2} \left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\beta-4} - \ldots \right\}.$$

Substituindo estes desenvolvimentos nas expressões

$$x = \left[\frac{1-m^2}{2} + \frac{1+m^2}{2} \cos \frac{\alpha}{\beta} \varphi \right] \left[\cos \theta \cos \varphi + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \right]$$

$$y = \left[\frac{1-m^2}{2} + \frac{1+m^2}{2} \cos \frac{\alpha}{\beta} \varphi \right] \left[\operatorname{sen} \theta \cos \varphi - \cos \theta \operatorname{sen} \varphi \right],$$

vem um resultado de fórma

$$x = A_1\left(\cos\frac{\varphi}{\beta}\right)^{\alpha+\beta} + A_2\left(\cos\frac{\varphi}{\beta}\right)^{\alpha+\beta-1} + \,..$$

$$+\operatorname{sen}\frac{\varphi}{\beta}\left\{B_1\left(\cos\frac{\varphi}{\beta}\right)^{\alpha+\beta-1} + B_2\left(\cos\frac{\varphi}{\beta}\right)^{\alpha+\beta-2} + \ldots\right\},$$

$$y = a_1\left(\cos\frac{\varphi}{\beta}\right)^{\alpha+\beta} + a_2\left(\cos\frac{\varphi}{\beta}\right)^{\alpha+\beta-1} + \ldots$$

$$+\operatorname{sen}\frac{\varphi}{\beta}\left\{b_1\left(\cos\frac{\varphi}{\beta}\right)^{\alpha+\beta-1} + b_2\left(\cos\frac{\varphi}{\beta}\right)^{\alpha+\beta-2} + \ldots\right\},$$

onde A_1, $A_2, \ldots,$ B_1, $B_2, \ldots,$ a_1, $a_2, \ldots,$ b_1, $b_2, \ldots$ representam quantidades constantes.

Por meio d'estas equações vê-se já que a curva é algebrica, quando $\frac{2m}{1+m^2}$ é um numero *racional*, visto que, eliminando as quantidades $\cos\frac{\varphi}{\beta}$ e $\operatorname{sen}\frac{\varphi}{\beta}$ entre estas equações e a equação

$$\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{\beta} + \cos^2\frac{\varphi}{\beta} = 1,$$

vem uma relação algebrica entre x e y.

Podemos mostrar ainda que a curva é n'este caso *unicursal*. Basta para isso notar que, pondo

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{\beta} = \frac{t^2-1}{t^2+1},$$

vem

$$\cos\frac{\varphi}{\beta}=\frac{2t}{t^2+1},$$

e que, substituindo estes valores nas expressões precedentes de x e y, vem um resultado de fórma

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),$$

onde $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ representam funcções racionaes de t.

Vê-se pois, em conclusão, que a curva é algebrica quando m é inteiro, como dizia Marie, e quando $m+\frac{1}{m}$ é inteiro, como pensava Monteiro da Rocha, pois que, em ambos estes casos, $\frac{2m}{1+m^2}$ é racional. É, em geral, algebrica em todos os casos em que m é raiz de uma equação de fórma

$$\alpha(m^2+1)-2\beta m=0,$$

α e β representando numeros inteiros; e portanto em todos os casos em que m é racional e em alguns casos em que é irracional.

Monteiro da Rocha, substituindo m por $m+\frac{1}{m}$, commetteu o erro de julgar falsa a passagem considerada da Mecanica de Marie, quando não o era; mas Anastacio da Cunha, dando como *absurda* [1] a substituição que fez Monteiro da Rocha, parece

---

(1) As palavras com que Anastacio da Cunha se refere a esta substituição são as seguintes: Podia lembrar-se do que lhe succedeu com a equação de catenaria na sua *Traducção da Mechanica* do Abbade Marie; do absurdo que imprimiu nas erratas presumindo que emendava o auctor.

considerar esta substituição como erronea, quando era apenas inopportuna.

4. Uma questão que se apresenta muito naturalmente é procurar o caminho que seguiu Monteiro da Rocha, para demonstrar que a curva considerada é algebrica, quando $m+\frac{1}{m}$ é um numero inteiro. Este caminho não póde coincidir com o precedente, porque, se coincidisse, não teria certamente este habil geometra deixado de reconhecer que o theorema tem logar no caso geral de $m+\frac{1}{m}$ ser racional.

Para que a catenaria considerada seja algebrica é necessario que entre $\operatorname{sen}\varphi$, $\cos\varphi$ e $\cos\frac{2m}{m^2+1}\varphi$ exista uma relação algebrica, e porisso, para achar os casos em que a curva é algebrica, é indispensavel recorrer ás fórmulas (2) e (3) ou a outras equivalentes a estas, que são bem conhecidas, e que determinam $\operatorname{sen}k\omega$ e $\cos k\omega$ em funcção de $\operatorname{sen}\omega$ e de $\cos\omega$, ou só em funcção d'uma d'estas quantidades. Porisso, obter o resultado geral ou apenas um resultado particular depende do modo como se empregarem estas formulas. Provavelmente Monteiro da Rocha usou d'ellas de um modo que, se não é identico ao que vamos expôr, não differirá essencialmente d'elle.

Escreva-se a equação (1) do modo seguinte:

$$z=\frac{1-m^2}{2}+(1+m^2)\left[\cos^2\frac{m}{1+m^2}\varphi-\frac{1}{2}\right], \tag{4}$$

e, pondo

$$\cos\varphi=\cos\frac{1+m^2}{m}\cdot\frac{m}{1+m^2}\varphi,\quad \operatorname{sen}\varphi=\operatorname{sen}\frac{1+m^2}{m}\cdot\frac{m}{1+m^2}\varphi,$$

appliquem-se a estas funcções as fórmulas (2) e (3), tomando

$$k=\frac{1+m^2}{m},\quad \omega=\frac{m}{1+m^2}\varphi.$$

Teremos

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left\{\left(2\cos\frac{m}{1+m^2}\varphi\right)^k - \frac{k}{1}\left(2\cos\frac{m}{1+m^2}\varphi\right)^{k-2} + \ldots\right\}.$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen}\frac{m}{1+m^2}\varphi\left\{\left(2\cos\frac{m}{1+m^2}\varphi\right)^{k-1}\right.$$

$$\left.-\frac{k-2}{1}\left(\cos\frac{m}{1+m^2}\varphi\right) + \ldots\right\}.$$

Substituindo estes valores de $\cos\varphi$ e $\operatorname{sen}\varphi$ nas expressões de x e y, e eliminando depois $\operatorname{sen}\frac{m}{1+m^2}\varphi$, $\cos\frac{m}{1+m^2}\varphi$ e z entre as equações que assim se obtêem, a equação (4) e as equações

$$\operatorname{sen}^2\frac{m}{1+m^2}\varphi + \cos^2\frac{m}{1+m^2}\varphi = 1,$$

obtém-se uma equação algebrica, em que só entram x e y. A analyse porém que precede só é applicavel quando o valor $\frac{1+m^2}{m}$, que se deu a k, para applicar as fórmulas (2) e (3), é inteiro, isto é quando é inteiro o binomio $m+\frac{1}{m}$. Seguindo pois este caminho, demonstra-se o resultado particular obtido por Monteiro da Rocha; não se demonstra porém o theorema geral.

Pelo que respeita ao modo de applicar as fórmulas (2) e (3) que levou Marie á conclusão de que a curva é algebrica, quando m é inteiro, parece-nos provavel que faria primeiramente $k=2m$ e $\omega=\frac{\varphi}{1+m^2}$ e depois $k=1+m^2$, $\omega=\frac{\varphi}{1+m^2}$.

5. Antes de terminar este artigo, notaremos ainda que a equação (1) mostra que a catenaria considerada é a *concoide* das

curvas representadas pela equação, em coordenadas polares,

$$\rho = \frac{1+m^2}{2} \cos \frac{2m}{1+m^2} \varphi,$$

chamando, como alguns auctores, concoide de uma curva o logar geometrico dos pontos que se obtêem tomando sobre os vectores dos seus pontos, a partir da curva dada, segmentos de egual comprimento. As curvas representadas por esta ultima equação chamam-se *rosaceas*, e foram estudadas pela primeira vez por Guido-Grandi em um opusculo intitulado *Flores geometrici ex rhodenearum et claeliarum curvarum descriptione resultantes*, publicado em Florença em 1728. Podem vêr-se as propriedades d'ellas na nossa *Geometria de las curvas notables, tanto planas como alabiadas*, publicado pela Academia Real das Sciencias de Madrid.

SUR LES SÉRIES NEUMANNIENNES DE FONCTIONS SPHÉRIQUES.

PAR

NIELS NIELSEN
(Professeur à l'Université de Copenhague)

---

§ 1. Formules générales relatives à $P^{\nu,n}(x)$

Designons par ν un nombre fini quelconque, différent de zéro, il est évident que la puissance

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\nu},$$

où x est une quantité finie quelconque, est une fonction holomorphe de α, pourvu que

$$|\alpha|<|x\pm\sqrt{x^2-1}|;$$

c'est-à-dire que nous obtenons, pour de telles valeurs de α, une série de puissances comme suit

$$(1) \qquad (1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\nu}=\sum_{s=0}^{s=\infty} P^{\nu,s}(x).\alpha^s,$$

où le coefficient général $P^{\nu,n}(x)$ est un polynome entier du de-

gré n et par rapport à x et par rapport à ν; nous aurons en effet

$$(2)\qquad P^{\nu,n}(x) = \frac{1}{\mu(\nu)} \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s \Gamma(\nu+n-s)}{s!\,(n-2s)!} (2x)^{n-2s}.$$

Supposons particulièrement $\nu = \frac{1}{2}$; nos polynomes $P^{\nu,n}(x)$ deviendront identiques aux fonctions sphériques de première espèce, souvent appellées polynomes de Legendre, savoir

$$P^{\frac{1}{2},n}(x) = P^n(x);$$

c'est pourquoi nous proposons pour les $P^{\nu,n}(x)$ le nom *fonctions sphériques généralisées.*

La formule générale (1), qui est due à Jacobi [1], nous donne sans peine une suite de propriétés fondamentales de $P^{\nu,n}(x)$. Posons par exemple $\nu = 1$ et $x = \cos\theta$; nous aurons sans peine

$$(4)\qquad P^{1,n}(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta};$$

différentions ensuite par rapport à ν les deux membres de (1), l'hypothèse $\nu = 0$ donnera de même

$$(5)\qquad \lim_{\nu=0}\Big(\Gamma(\nu)\,P^{\nu,n}(\cos\theta)\Big) = \frac{2\cos n\theta}{n},\quad n \geq 1.$$

De plus, posons pour abréger

$$\omega = |x \pm \sqrt{x^2-1}\,| - \delta,$$

[1] *Journal de Crelle*, t. 56, p. 149; 1859. *Werke*, t. 6, p. 184.

où il faut prendre la plus petite des deux valeurs absolues qui figurent au second membre, tandis que δ désigne une quantité positive, aussi petite qu'on veut, mais d'une grandeur assignable; la formule (1) donnera immédiatement l'inégalité

$$(6) \qquad |\alpha^n P^{\nu,n}(x)| < k_n \cdot \left(\frac{|\alpha|}{\omega}\right)^n,$$

où k_n est un nombre positif qui restera fini, même pour n infini.

Un grand nombre de géomètres ont étudié les fonctions $P^{\nu,n}(x)$; nous nons bornerons à indiquer ici l'extension due à feu M. Gegenbauer (1) d'un théorème de M. C. Neumann (2) à Leipsig concernant les polynomes de Legendre, savoir ce théorème général:

Supposons que la série de puissances

$$(7) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

ait son rayon de convergence r *plus grand que l'unité; nous aurons ce développement en série de fonctions* $P^{\nu,n}(x)$:

$$(8) \qquad f(x) = \Gamma(\nu) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (2\nu + 2s) A_s \cdot P^{\nu,s}(x),$$

série dont le domaine de convergence est l'intérieur de l'ellipse qui a son grand axe égal à $(r + r^{-1})$ *et ses foyers dans les points* $(\pm 1,0)$.

Dans ce qui suit nous désignons toujours par $E(r)$ l'ellipse de convergence de la série (8).

Il est digne de remarque que la série *neumannienne* (8) con-

(1) *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. 75; 1877.
(2) *Ueber die Entwickelung einer Funktion mit imaginärem Argument nach der Kugelfunktionen erster und zweiter Art.* Halle, 1862.

tient le paramètre quelconque ν, ce qui nous sera très utile bientôt.

Quant aux coefficients A_n qui figurent dans (8), on les exprime ordinairement sous forme des intégrales définies, expressions qui sont très incommodes pour une étude approfondie des séries *neumanniennes;* c'est pourquoi je substitue au lieu des intégrales susdites la série infinie suivante:

$$(9) \qquad A_n = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(n+2s)!\, a_{n+2s}}{s!\, \Gamma(\nu+n+s+1)\, 2^{n+2s+1}}.$$

§ 2. Développement de $P^{\rho,n}(x)$.

Comme une première application du théorème général que nous venons d'énoncer, considérons la série finie obtenue, en vertu de (8), pour la fonction $P^{\rho,n}(x)$.

A cet effet, appliquons la formule de Gauss

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\, \Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\, \Gamma(\gamma-\beta)};$$

un simple calcul donnera la formule cherchée

$$(10) \quad P^{\rho,n}(x) = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\rho)} \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s (\nu+n-2s)\Gamma(\rho+n-s)}{\Gamma(\nu+n-s+1)} \cdot \binom{\nu-\rho}{s} \cdot P^{\nu,n-2s}(x),$$

qui est nouvelle, je le crois; il est évident que (10) est applicable pour une valeur finie quelconque de x.

Déduisons maintenant de (10) une suite de formules plus particulières et très connues. Posons d'abord $\rho = 0$, $\rho = 1$ et

$x = \cos\theta$; les formules (4) (5) donnent respectivement

$$(11) \qquad \frac{2\cos(n\theta)}{n} = \Gamma(\nu)\sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s(\nu+n-2s)(n-s-1)!}{\Gamma(\nu+n-s+1)}\cdot\binom{\nu}{s}\cdot P^{\nu,n-2s}(\cos\theta),$$

$$(12) \qquad \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = \Gamma(\nu)\cdot\sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s(\nu+n-2s)(n-s)!}{\Gamma(\nu+n-s+1)}\cdot\binom{\nu-1}{s}\cdot P^{\nu,n-2s}(\cos\theta);$$

posons particulièrement dans (12) $\nu = 0$, nous obtenons une formule trigonométrique élémentaire très connue, tandis que (11) donnera pour $\nu = \frac{1}{2}$ une formule trouvée déjà par Legendre [1] et Laplace [1].

Pour obtenir les formules inverses de (11) et (12), mettons dans (10) $\nu = 0$, $\nu = 1$; nous aurons respectivement, en vertu de (4) et (5),

$$(13) \qquad P^{\rho,n}(\cos\theta) = (-1)^n\cdot\sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} E_{n-2s}\cdot\binom{-\rho}{s}\binom{-\rho}{n-s}\cdot\cos(n-2s)\theta$$

$$(14) \qquad P^{\rho,n}(\cos\theta) = (-1)^n\cdot\sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{n-2s+1}{n-s+1}\cdot\binom{1-\rho}{s}\binom{-\rho}{n-s}\cdot\frac{\sin(n-2s+1)\theta}{\sin\theta},$$

où il faut poser dans (13) $E_0 = 1$, et $E_s = 2$ pour $s \geqq 1$. Posons dans (13) $\rho = \frac{1}{2}$; nous obtenons une formule bien con-

(1) Voir M. Wangerin dans l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* t. II, p. 702; 1904.

nue [1], tandis que l'hypothèse $\rho = 1$ donnera la même formule élémentaire que (12) pour $\nu = 0$.

Appliquons ensuite l'identité

$$D_x P^{\nu,n}(x) = 2\nu \,.\, P^{\nu+1,n-1}(x),$$

qui est une conséquence immédiate de (1), puis mettons dans (10) $\rho = \nu + p$, où p désigne un entier positif; nous aurons

$$(15) \qquad D_x^p P^{\nu,n+p}(x) = 2^p \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^\nu (\nu+n-2s)\Gamma(\nu+n+p-s)}{\Gamma(\nu+n-s+1)} \cdot \binom{-p}{s} \cdot P^{\nu,n-2s},$$

dont le cas particulier $p = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$ est dû à CHRISTOFFEL [2].

Revenons maintenant à la formule générale (10), puis introduisons la fonction auxiliaire

$$\Gamma_n(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n^x}{x(x+1) \cdots (x+n-1)},$$

où n désigne un entier positif, de sorte que nous aurons

$$\lim_{n=\infty} \Gamma_n(x) = \Gamma(x).$$

Cela posé, les identités évidentes

$$\Gamma(x+n) = x(x+1) \cdots (x+n-1)\,\Gamma(x)$$

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1) \cdots (x-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}$$

---

(1) WANGERIN, loc. cit., p. 707. HEINE, *Handbuch der Kugelfunktionen*, t. I, § 20.

(2) *Dissertation*, Berlin, 1856. M. E. BAUER dans le *Journal de Crelle*, t. 56, p. 101; 1859.

donnent

$$\Gamma(x+n) = (n-1)!\, n^x \cdot \frac{\Gamma(x)}{\Gamma_n(x)},$$

$$\binom{x}{n} = \frac{(-1)^n n^{-x-1}}{\Gamma_n(-x)};$$

désignons ensuite par ω le même nombre que figure dans (6), il résulte, en vertu de (10), l'inégalité suivante

$$(16) \qquad |\alpha^n P^{\nu,n}(x)| < \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} k_{n,s} \cdot \left|\frac{\alpha}{\omega}\right|^{n-2s} \cdot |\alpha|^{2s},$$

où $k_{n,s}$ désigne un nombre positif qui restera fini, même pour n ou s infinis.

§ 3. Série neumannienne obtenue pour $f(\alpha x)$.

Pour donner une application plus générale du théorème énoncé dans le § 1, considérons la série de puissances

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

dont le rayon de convergence r n'est pas égal à zéro, puis désignons par α une nombre fini, tel que $|\alpha| < r$; nous aurons une série neumannienne de la forme suivante :

$$(17) \qquad f(\alpha x) = \Gamma(\nu) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (2\nu + 2s)\, A^{\nu,s}(\alpha)\, P^{\nu,s}(x),$$

où nous avons posé pour abréger

$$(18)\qquad A^{\nu,n}(\alpha)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(n+2s)!\,a_{n+2s}}{s!\,\Gamma(\nu+n+s+1)}\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+2s},$$

et la série (17) est convergente à l'intérieur de l'ellipse $E\left(\frac{r}{|\alpha|}\right)$.

Supposons particulièrement $r>1$, puis mettons dans (17) $\alpha=1$; nous aurons

$$(19)\qquad A^{\nu,n}(1)=A_n,$$

où A_n désigne le coefficient général qui figure au second membre de (8).

Quant aux fonctions $A^{\nu,n}(\alpha)$, que nous avons à étudier maintenant, démontrons d'abord que la série de puissances que figure au second membre de (18) a son rayon de convergence égal à r au moins. A cet effet, introduisons la fonction $\Gamma_n(x)$, puis appliquons l'identité évidente

$$(n+2s)<2^{n+2s};$$

nous aurons

$$(20)\qquad \left|\frac{(n+2s)!a_{n+2s}}{s!\Gamma(\nu+n+s+1)}\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+2s}\right|<|\Gamma_{n+s+1}(\nu)\ (n+s+1)^{-\nu}|\cdot|a_{n+2s}\cdot\alpha^{n+2s}|.$$

Mettons ensuite $\alpha_0=r-\delta$, où δ désigne une quantité positive, aussi petite qu'on le veut, mais d'une grandeur assignable, puis mettons

$$(21)\qquad |\Gamma_{n+s+1}(\nu)\,(n+s+1)^{-\nu}\,a_{n+s}\,\alpha_0{}^{n+2s}|\leqq k_n,$$

pour $s=0,1,2,3,4,\cdots$; il est évident que la quantité posi-

tive k est finie, même pour n infini, parce que r est le rayon de convergence de la série de puissances $f(x)$.

Or, les deux inégalités (20) (21) donnent immédiatement, en vertu de (18), la valeur majorante

$$(22) \qquad |A^{\nu,n}(\alpha)| < \frac{k_n}{1-\left|\frac{\alpha}{\alpha_0}\right|} \cdot \left|\frac{\alpha}{\alpha_0}\right|^n, \quad |\alpha| < r.$$

Cela posé, revenons à la formule (17), puis chercheons dans ses deux membres les termes qui contiennent comme facteur la puissance x^n; nous aurons, en vertu de (2), ce développement d'une seule puissance de α en série de fonctions $A^{\nu,n}(\alpha)$:

$$(23) \qquad a_n \alpha^n = \frac{2^{n+1}}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s (\nu+n+2s)\Gamma(\nu+n+s)}{s!} \cdot A^{\nu,n+2s}(\alpha),$$

série qui est valable, pourvu que $|\alpha| < r$, comme le montre clairement l'inégalité (22).

Remplaçons ensuite dans (17) ν par ρ, ce qui donnera

$$(24) \qquad f(\alpha x) = \Gamma(\rho) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (2\rho + 2s) A^{\rho,s}(\alpha) P^{\rho,s}(x),$$

puis introduisons au lieu de toutes les fonctions $P^{\rho,s}(x)$ qui figurent au second membre de (24) les expressions correspondantes tirées de (10); nous aurons une série à double entrée Δ, dont les séries horizontales sont formées par les développements obtenus de (10), séries dont le type général est

$$(25) \qquad h_s = \Gamma(\nu)(2\rho+2s) A^{\rho,s}(\alpha) \cdot \sum_{r=s}^{\leqq \frac{s}{2}} \frac{(-1)^r (\nu+s-2r)\Gamma(\rho+s-r)}{\Gamma(\nu+s-r+1)} \cdot \binom{\nu-\rho}{r} P^{\nu,s-2r}(x),$$

et nous aurons

$$\Delta = h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + \cdots$$

Écrivons maintenant les termes des séries h_n, de sorte que ceux qui contiennent la même fonction $P^{\nu,n}(x)$, savoir les termes

$$(26)\quad v_n = P^{\nu,n}(x)\cdot\Gamma(\nu)(2\nu+2n)\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s(\rho+n+2s)\cdot\frac{\Gamma(\rho+n+s)}{\Gamma(\nu+n+s+1)}\cdot\binom{\nu-\rho}{s}\cdot A^{\nu,n+2s}(\alpha)$$

forment les séries verticales de Δ.

Cela posé, supposons $|\alpha| < r\,|x \pm \sqrt{x^2-1}\,|$; les formules (16) et (22) montrent clairement que les séries h_s sont, pour s infini, convergentes comme une série de puissances et que c'est la même chose pour v_n, même pour n infini; c'est-à-dire qu'il est permis de ranger dans un ordre quelconque les termes de Δ, ce qui donnera par exemple

$$\Delta = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots,$$

série qui doit être identique à (17), terme à terme, parce que les séries *neumanniennes* ne permettent aucun développement de zéro.

Supposons maintenant n fini; la formule (2) montre clairement que la série v_n est convergente comme une série de puissances, pourvu que $|\alpha| < r$, ce qui donnera la proposition suivante:

Pour le coefficient $A^{\nu,n}(\alpha)$ *qui figure dans la série neumannienne (17) nous aurons ce développement remarquable*

$$(27)\quad A^{\nu,n}(\alpha) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s(\rho+n+2s)\Gamma(\rho+n+s)}{\Gamma(\nu+n+s+1)}\cdot\binom{\nu-\rho}{s}\cdot A^{\rho,n+2s}(\alpha),$$

convergent pourvu que $|\alpha| < r$, *tandis que* $f(x)$ *est une fonction quelconque, holomorphe pourvu que* $|x| < r$.

Comme une application d'une portée assez étendue, différentions p fois par rapport à ν, terme à terme, la série (8), ce qui est permis; nous aurons

$$f^{(p)}(x) = 2^p \cdot \Gamma(\nu+p) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (2\nu+2p+2s)\, A_{p+s} \cdot P^{\nu+p,s}(x),$$

d'où, en mettant dans (27) $\rho = \nu + p$ et $\alpha = 1$, ce corollaire de la proposition précédente:

Pour la dérivée d'ordre p de la série neumannienne (8) *nous aurons ce développement en série du même genre:*

$$(28) \qquad f^{(p)}(x) = 2^p \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (2\nu + 2s)\, A_s^{(p)} \cdot P^{\nu,s}(x),$$

valable où l'est la série donnée (8), et où il faut admettre

$$(28 \text{ bis}) \qquad A_n^{(p)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s(\nu+n+p+2s)\,\Gamma(\nu+n+p+s)}{\Gamma(\nu+n+s+1)} \binom{-p}{s} A_{n+p+2s}.$$

Le cas particulier $p = 1$ est très élégant.

§ 4. Exemples. Les fonctions $J_\nu(x)$ et $Q^{\nu,\rho}(x)$.

Comme un premier exemple de la théorie que nous venons de développer, considérons la série *neumannienne* obtenue pour $P^{\sigma,n}(\alpha x)$, série qui deviendra finie. Posons pour abréger

$$(29) \qquad p_s^{\nu,\sigma}(\alpha) = \frac{\Gamma(\sigma+n-s)\alpha^{n-2s}}{s!\,\Gamma(\nu+n-2s+1)} \cdot F(\sigma+n-s, -s, \nu+n-s+1, \alpha^2),$$

où F désigne la série hypergéométrique ordinaire; nous aurons, en vertu de (18),

$$(30)\qquad P^{\sigma,n}(\alpha x)=\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\sigma)}\cdot\sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}}(-1)^s(\nu+n-2s)\,p_s^{\nu,\sigma}(\alpha)\cdot P^{\nu,n-2s}(x),$$

d'où

$$A^{\nu,n-2s}(\alpha)=\frac{(-1)^s}{2\Gamma(\sigma)}\cdot p_s^{\nu,\sigma}(\alpha),$$

de sorte que les formules générales (23) et (27) donnent ici respectivement

$$(31)\qquad \frac{\Gamma(\sigma+n-s)}{s!}\cdot\alpha^{n-2s}=\sum_{r=0}^{r=s}(-1)^r(\nu+n-2r)\Gamma(\nu+n-s-\nu)p_r^{\nu,\sigma}(\alpha)$$

$$(32)\qquad p_s^{\nu,\sigma}(\alpha)=\sum_{r=0}^{r=s}(\rho+n-2\nu)\frac{\Gamma(\rho+n-s-\nu)}{\Gamma(\nu+n-s-r+1)}\cdot\binom{\nu-\rho}{s-r}\cdot p_r^{\nu,\sigma}(\alpha),$$

développements qui sont valables pour une valeur finie quelconque de α.

Remarquons en passant que la formule (30) nous permet de généraliser la formule (27). A cet effet, développons $f(\alpha\beta x)$, à l'aide de (17), en série de fonctions $P^{\nu,n}(x)$ et en série de fonctions $P^{\rho,n}(\beta x)$; la même procédé que nous venons d'appliquer dans le passage de (24) à (17) nous conduira, en vertu de (30), à la formule cherchée, qui ne présente qu'un intérêt plus médiocre. On trouvera du reste une formule de ce genre dans mon *Traité des fonctions cylindriques* (1).

(1) *Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen;* Leipzig, 1904, p. 275.

Comme deuxième exemple développons la fonction $e^{\alpha xi}$; nous aurons, en vertu de (18),

$$A^{\nu,n}(\alpha) = \frac{i^n}{2} \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-\nu} J^{\nu+n}(x),$$

où $J^\nu(\alpha)$ désigne la fonction cylindrique de première espèce, savoir

$$J^\nu(\alpha) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\nu+2s}}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)};$$

la série *neumannienne* correspondante

$$(33) \qquad e^{\alpha xi} = \frac{\Gamma(\nu)}{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} i^s (\nu+s) J^{\nu+s}(\alpha) P^{\nu,s}(x)$$

est convergente pour des valeurs finies quelconques de x et de α.

La série générale (33) est due à GEGENBAUER ([1]), tandis le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$ appartient à M. BAUER ([2]).

La forme même de $A^{\nu,n}(\alpha)$ montre clairement qu'il suffit appliquer les formules (23) et (27) dans le cas particulier $n=0$; nous aurons ces deux formules très connues ([3]).

$$(34) \qquad \left(\frac{\alpha}{2}\right)^\nu = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\nu+2s)\,\Gamma(\nu+s)}{s!} \cdot J^{\nu+2s}(\alpha),$$

$$(35) \quad \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\rho-\nu} J^\nu(\alpha) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\rho+2s)\,\Gamma(\rho+s)}{\Gamma(\nu+s+1)} \cdot \binom{\nu-\rho}{s} \cdot J^{\rho+2s}(\alpha),$$

valables pour une valeur finie quelconque de α.

([1]) ([2]) Loc. cit., p. 277; dans la formule (2) il faut lire au second membre $\Gamma(\nu)$ au lieu de $\Gamma(\nu+1)$.

([3]) Loc. cit. pp. 273, 275.

Étudions comme dernier exemple la fonction

$$(1-\alpha x)^{-\nu-\sigma} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{\quad+\sigma+s-1}{s} \alpha^s x^s, \quad r=1;$$

un simple calcul donnera, en vertu de (**18**),

$$A^{\nu,n}(\alpha) = \frac{\Gamma(\nu+\sigma+n)}{2^{n+1}\Gamma(\nu+\sigma)\Gamma(\nu+n+1)} . F\left(\frac{\nu+\sigma+n}{2}, \frac{\nu+\sigma+n+1}{2}, \nu+n+1, \alpha^2\right).$$

Introduisons maintenant la *fonction métaphérique*

$$Q^{a,b}(y) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(b+2a)\,y^{-b-2a}}{2^{b+1}\,\Gamma(a+b+1)} . F\left(\frac{b+2a}{2}, \frac{b+2a+1}{2}, a+b+1, \frac{1}{y^2}\right);$$

nous aurons dans ce cas

$$A^{\nu,n}(\alpha) = \frac{2^{\nu-\sigma}\,\alpha^{-\nu-\sigma}}{\sqrt{\pi}\;\Gamma(\nu+\sigma)} . Q^{\sigma,r-\sigma+n}\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

d'où finalement

$$(36) \quad (1-\alpha x)^{-\nu-\sigma} = \frac{\Gamma(\nu)2^{\nu-\sigma}\alpha^{-\nu-\sigma}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\sigma)} . \sum_{s=0}^{s=\infty} (2\nu+2s) Q^{\sigma,\nu-\sigma+s}\left(\frac{1}{\alpha}\right) . P^{\nu,s}(x),$$

formule qui est due à GEGENBAUER ([1]).

Je me reserve de revenir dans une autre occasion á la série

([1]) *Sitzungsberichte der Wiener Akademie,* t. 100; 1891.

neumannienne (36) qui donne, comme cas particuliers, des généralisations de certains développements de JACOBI et de HEINE.

Quant à l'application des formules (23) et (27), il suffit étudier le cas $n=0$: posous $\alpha=\frac{1}{y}$ et $\nu+\sigma$, $\rho+\sigma$ ou lieu de ν et ρ respectivement; nous aurons ces deux développements

$$(37)\quad y^{-\rho-2\sigma}=\frac{2\rho+1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\sigma)}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s(\rho+\sigma+2s)\Gamma(\rho+\sigma+s)}{s!}\cdot Q^{\sigma,\rho+2s}(y)$$

$$(38)\quad (2y)^{\nu-\rho}Q^{\sigma,\nu}(y)=\frac{\Gamma(\nu+2\sigma)}{\Gamma(\rho+2\sigma)}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s(\rho+\sigma+2s)\Gamma(\rho+\sigma+s)}{\Gamma(\nu+\sigma+s+1)}\binom{\nu-\rho}{s}Q^{\sigma,\rho+2s}(y),$$

qui sont convergents, pourvu que $|y|>1$.

L'analogie parfaite entre les deux groupes de formules (34) (35) et (37) (38) est très intéressante, ce me semble; or, notre point de vue général met en pleine lumière la raison d'une telle analogie.

Quant à la formule (38), elle est d'une portée assez étendue, à cause des trois paramètres quelconques ν, ρ et σ qu'elle contient. En effet, posons $\rho=0$, $\sigma=\frac{1}{2}$, nous trouvons des développements d'une fonction conique et d'une fonction annulaire en séries de fonctions sphériques ordinaires de seconde espèce.

Dans le cas particulier $\rho=\nu+n$, où n désigne un entier positif, les séries qui figurent aux seconds membres de (35) et (38) diviendront des séries finies.

Copenhague, le 26 janvier 1905.

Roberto Duarte Silva

Off. do Commercio do Porto

A OBRA SCIENTIFICA E A VIDA DO CHIMICO PORTUGUEZ ROBERTO DUARTE SILVA

POR

A. J. FERREIRA DA SILVA

Em terra extranha, que lhe foi sempre amiga, e que elle honrou com os primores de um caracter nobre e levantado, com o exemplo do cumprimento rigoroso do seu dever, com o amor ao trabalho que chegava até o sacrificio, e com as manifestações brilhantes de seu talento, que o fazem collocar em logar de honra na galeria dos chimicos modernos — dorme o seu ultimo somno, num dos cemiterios de Paris, á sombra da memoria de collegas dedicados, de alguns mestres eminentes da chimica, e de amigos que elle adquiriu pela sua inquebrantavel lealdade — um portuguez dos mais illustres.

ROBERTO DUARTE SILVA se chama elle.

Entre os mestres illustres a que o nome do nosso compatriota se acha ligado, sobresae FRIEDEL, que o associou a si em pesquisas importantes, entre as quaes merece primasia a synthese total da glycerina. Já deste homem notavel, que exerceu influencia sobre a marcha da sciencia, esbocei a obra scientifica, logo apoz o seu fallecimento: era um dever de amizade e de gratidão que a isso me compellia (1).

---

(1) *Noticia sobre a vida e os trabalhos scientificos de* CHARLES FRIEDEL, por A. J. FERREIRA DA SILVA. Coimbra, 1899, 1 op. de 24 pag.

Ao serem inaugurados os *Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto* nenhum assumpto mais interessante me occorreu do que este, de fazer conhecida entre nós a obra chimica do nosso compatriota. Honrou-me FRIEDEL com subidas provas de affecto e estima; e não me honrou menos o meu nobre patricio, de quem guardo affectuosa correspondencia, sem haver tido a dita de com elle tratar pessoalmente. É ainda a saudade pelo amigo, o apreço pelas suas levantadas qualidades, e a gratidão á sua honrada memoria que me levam a render-lhe esta homenagem de respeito.

Fique assim sellada por uma homenagem commum a amizade que a ambos tinha — ao mestre e ao discipulo.

Tambem FRIEDEL honrou a memoria de ROBERTO SILVA, escrevendo para o *Boletim da Sociedade de chimica de Paris* uma noticia [1] sobre a vida e os trabalhos do seu amigo. A minha noticia não faz, porém, duplo emprego com a do illustre mestre: é mais pormenorisada e é mais elementar, digamos assim, para que os estudantes portuguezes a possam bem comprehender; mas, por isso mesmo, é mais modesta!

Complete assim, tambem o mais modesto e o menos auctorisado dos tres, e que sobreviveu aos seus amigos, o cyclo de affectos que em vida os ligaram!

PRIMEIRA PARTE

I

Não obstante a sua naturalidade — ROBERTO DUARTE SILVA nasceu em Cabo Verde — quasi toda a vida scientifica se desenrolou em França. Na segunda parte deste estudo veremos as causas determinantes deste facto, e contaremos como tendo estado algum tempo em Lisboa, onde completou o seu curso de Pharmacia, e depois alguns annos em Macau, o nosso illustre patricio passou a Paris em 1862, onde fixou a sua residencia,

---

(1) *Notice sur la vie et les travaux de* R. D. SILVA, par M. FRIEDEL, 1 op. de XIX pag. (*Bulletin de la Société chimique de Paris*, 1888).

para estudar a bella sciencia para que tinha revelado singular predilecção, desde a sua mocidade, e ouvir as lições dos mestres eminentes cujas obras elle apreciava no seu trabalho humilde de todos os dias, antes de os conhecer.

Roberto Duarte Silva, iniciando a sua obra scientifica em 1867 no laboratorio de Wurtz, quis prestar um serviço ao seu paiz: as primicias do seu lavor chimico consagrou-as á sua patria e ao seu torrão natal, estudando dois productos de Cabo Verde — um producto do reino mineral e um oleo vegetal —, que lá se podem explorar em larga escala, e que ambos se achavam na exposição universal de Paris de 1867.

*

O primeiro era uma *arêa preta*, procedente de Santiago de Cabo Verde.

Foi essa arêa o objecto de uma nota publicada naquelle anno (1).

A arêa em questão era em parte attrahida pela barra magnetica, e R. Silva computa em cerca de 55 % a porção magnetica.

Esta é, na maior parte, soluvel no acido chlorhydrico concentrado, com excepção de 1,20 % constituida por esmeril. A parte soluvel, composta principalmente por 52,5 % de ferro e 21,46 % de acido titanico, é formada de ferro titanado $TiO^2,FeO + nFe^2O^3$, com um pouco de magnesia (2,13 %) e de alumina (na proporção de 2,20 %).

A parte não magnetica, menos densa e sem os granulos brilhantes de aspecto metallico que se encontram na outra, é menos soluvel no acido chlorhydrico. Depois da fusão com o carbonato de sodio, tratada pelo acido chlorhydrico, deixou residuo consideravel, constituido não só por silica, que se dissolveu na potassa caustica, como por uma substancia insoluvel n'este alcali, e no acido chlorhydrico, na proporção de 29,72 %, e que á analyse se revelou formada por esmeril (alumina e ferro), na proporção de 15,12 %, e acido titanico ou rutilo, na cifra de 11,60 %. Emquanto aos 70,28 % restantes, são formados por silicato de

(1) *Comptes-Rendus*, t. LXV, du 29 juillet 1867, pag. 207.

calcio e aluminio (46,15 %), com magnesia (0,50) e traços de manganez, associado a 23,46 % de ferro titanato.

Em 100 partes da arêa, tal qual se encontra na natureza, existem de

Acido titanico....................	20,45
Ferro............................	35,00

Por isso, parecia a R. Silva que a arêa em questão tinha um certo interesse scientifico, e poderia ser materia prima para uma industria muito importante, por causa da riqueza em acido titanico e ferro.

«Se, como penso (dizia Silva ao terminar), esta variedade de arêa preta se encontrar em grande abundancia na mór parte das ilhas de Cabo Verde, poderá ser objecto d'uma exploração muito importante. Dando os resultados das minhas analyses, faço votos para que as minhas previsões se realisem, e serei feliz, na continuação das minhas averiguações, fazendo reverter em proveito da meu paiz as indicações scientificas que os meus estudos me tiverem suggerido».

*

De entre as plantas da familia de Euphorbiaceas, ha muitas que fornecem oleos fixos, mais ou menos complexos, entre os quaes os mais conhecidos são os do ricino e de croton.

Nas ilhas do archipelago de Cabo Verde existe em abundancia uma planta, da mesma familia, descripta por Adanson no meado do seculo XVIII, a que os indigenas dão o nome de *purgueira*, — o *Curcas purgans*. Do fructo desta planta extrahem-se quantidades consideraveis dum oleo fixo, dotado das mesmas propriedades physiologicas que o oleo de ricino, mas mais exageradas.

Tinha um chimico francez, o sr. Bouis. demonstrado que o oleo de ricino, destillado com a potassa, dava *alcool octylico secundario* (*methylhexylcarbinol, octanol* 2):

$$\underbrace{CH^3.CH^2.CH^2.CH^2.CH^2.CH^2.CHOH.CH^3}_{\text{Alcool octylico secundario.}}$$

Pensou R. Silva que o oleo de purgueira, analogo ao de ricino e procedente da mesma familia vegetal, poderia tambem

ser aproveitado como fonte do alcool octylico. Utilisando, pois, as pequenas amostras do oleo que estavam na exposição portugueza, submetteu á destillação o sabão potassico do oleo de purgueira. Obteve assim um liquido complexo, movel dotado de cheiro aromatico e grato; e submettendo o producto á destillação fraccionada, recolhendo a porção que passava a 178-180°, e sujeitando-a á analyse (C. . .73,65; H. . . 13,91; O. . . 12,44) reconheceu que, de facto, a composição d'este producto era do alcool octylico, e que os caracteres do liquido eram exactamente os do alcool que Bouis extrahira do oleo de ricino.

Estavam assim, confirmadas pela experiencia as suas previsões.

O alcool octylico não é uma substancia sem interesse: é um dos melhores dissolventes das materias gordas e das resinas, e poderá ser empregado para o fabrico de vernizes. O copal tenro dissolve-se neste alcool com a maior facilidade; e o copal duro, que dá tanto trabalho a utilisar, tambem nelle acaba por dissolver-se. Póde ainda servir na illuminação para substituir com vantagem a agua-raz ou os oleos de alcatrão do gaz, com a vantagem de não ter cheiro desagradavel, nem de se inflammar, ou de produzir misturas explosivas, ao contacto de uma vela. Os seus etheres são usados na confeitaria e perfumaria [1]. E, por isso, o trabalho de R. Silva tem real interesse e utilidade.

Entre os productos volateis da destillação da mistura do oleo e de potassa encontrou R. Silva o ammoniaco, o que o levou a inferir que o oleo de purgueira tinha quantidade notavel de azoto; e, de facto, a analyse elementar do oleo permittiu-lhe fixar a quantidade de azoto do oleo em 6,1 $^0/_0$.

*

É tambem pela mesma epocha que elle enceta os primeiros vôos em pesquisas originaes de chimica organica, occupando-se da formação das *amylaminas,* ou aminas do alcool amylico, da propylamina normal e da preparação do oxydo de triethylphosphina.

---

[1] Bouis (Jules) — *Recherches chimiques sur l'huile de ricin et sur l'alcool caprylique qui en résulte.* (Thèses présentées à la Faculté des sciences de Paris). Paris, 1855, pag. 31.

Para obter a amylamina $C^5H^{11}.NH^2$ recorreu R. SILVA ao processo de WURTZ, que consiste em decompor pela potassa caustica o cyanato de amylo:

$$\underbrace{C^5H^{11}.NCO}_{\text{Cyanato de amylo}} + \underbrace{2KOH}_{\text{Potassa}} = \underbrace{C^5H^{11}.NH^2}_{\text{Amylamina}} + \underbrace{CO^3K^2}_{\substack{\text{Carbonato}\\ \text{de potassio}}}$$

Saturando o producto d'esta reacção pelo acido chlorhydrico diluido, obtem-se o chlorhydrato da base, com o qual facilmente se obtem a base no estado livre, decompondo-o pela potassa, reacção parallela á da libertação do ammoniaco dos seus saes:

$$\underbrace{C^5H^{11},NH^2,HCl}_{\text{Chlorhydrato de amylamina}} + \underbrace{KOH}_{\text{Potassa}} = \underbrace{KCl}_{\substack{\text{Chloreto}\\ \text{de potassio}}} + \underbrace{H^2O}_{\text{Agua}} + \underbrace{C^5H^{11}.NH^2}_{\text{Amylamina}}$$

$$\underbrace{NH^3.HCl}_{\substack{\text{Chlorhydrato}\\ \text{de ammoniaco}}} + \underbrace{KOH}_{\text{Potassa}} = KCl + H^2O + \underbrace{NH^3}_{\substack{\text{Ammo-}\\ \text{niaco}}}$$

Julgava-se até R. SILVA que o unico producto obtido quando se decompunha o chlorhydrato de amylamina bruto pela potassa secca era a monoamylamina; e essa noção achava-se então consagrada nos tratados classicos de chimica, e particularmente no de GERHARDT (1).

R. SILVA, estudando com attenção o producto da reacção da potassa sobre o chlorhydrato de amylamina impuro, notou que elle não era homogeneo (2); e, sujeitando-o a uma destillação fraccionada, mostrou que com elle se obtem primeiro a *monoamyalmina,* que passa a 95°, á pressão de 758^{mm}; mas, continuando a aquecer, passa a 178-180° um liquido incolor, oleoso, de

(1) GERHARDT, *Traité de chimie organique;* Paris, 1854, t. II, pag. 696-697.

(2) GERHARDT, no seu Tratado de chimica organica, *loc. cit.*, falando da decomposição do chlorhydrato de amylamina pela potassa diz que — «*quando a reacção está terminada, se encontra no recipiente um liquido muito alcalino, algumas vezes separado em duas camadas, e donde é facil extrahir a amylamina, saturando-a pelo acido chlorhydrico*»; mas não explica a razão da apparição das duas camadas.

cheiro ammoniacal, quasi insoluvel na agua e soluvel no alcool e no ether; e, procedendo á analyse d'elle, reconheceu que era constituido por *diamylamina* $(C^5H^{11})^2NH$, que elle caracterisou pela sua transformação em chloroplatinato e chloroaurato; e ainda, proseguindo a destillação, passava acima de 200° (proximo a 205°) uma nova base, que se parecia com a diamylamina no aspecto, cheiro e quasi insolubilidade na agua, solubilidade no alcool e no ether; mas tendo a composição da *triamylamina* $(C^3H^{11})^5N$.

Assim, conclue Silva, quando se decompõe o producto bruto da reacção da potassa sobre o chlorhydrato da amylamina, obtido pelo methodo geral e classico de Wurtz, não se obtem unicamente uma amaina primaria, mas simultaneamente a amina secundaria e terciaria, isto é, os tres corpos:

$$\underbrace{C^5H^{11}NH^2}_{\substack{\text{Amylamina}\\ \text{primaria}}}; \qquad \underbrace{(C^5H^{11})^2NH}_{\substack{\text{Amylamina}\\ \text{secundaria}}}; \qquad \underbrace{(C^5H^{11})^3N}_{\substack{\text{Amylamina}\\ \text{terciaria}}}$$

que hoje, em notação atomica, se representam:

$$N\begin{cases} H \\ H \\ C^5H^{11} \end{cases}, \qquad N\begin{cases} H \\ C^5H^{11} \\ C^5H^{11} \end{cases}, \qquad N\begin{cases} C^5H^{11} \\ C^5H^{11} \\ C^5H^{11} \end{cases}.$$

Não succederá a mesma cousa com a maior parte das outras bases pertencentes ao grupo dos ammoniacos compostos? pergunta R. Silva ao terminar.

O facto, em realidade, dá-se e foi confirmado mais tarde por A. W. Hofmann; e a sua descoberta revela as qualidades de investigador do auctor. «Desde este seu primeiro trabalho, diz Friedel, graças a um estudo consciencioso e attento de todos os productos da reacção, R. Silva consegue descobrir factos que tinham escapado aos outros observadores. Todas as suas investigações apresentam as mesmas qualidades de cuidado e observação minuciosa».

Dois annos mais tarde, em 1869, occupou-se Roberto Duarte Silva do estudo da *propylamina*, obtida a partir do iodeto de propylo C^3H^7I, que Wurtz lhe cedera, e que havia sido preparado por Isidore Pierre a partir do alcool propylico de fermen-

tação (1). Este iodeto ferve a 102.° Transforma-se pela reacção sobre o cyanato de prata em cyanato de propylo, e este é decomposto pela potassa; a propylamina $C^3H^7.NH^2$, produzida nestas condições, converte-se em chlorhydrato, e este sal secco, decomposto pela baryta anhydra, gera uma amina, que, pela analyse elementar, reconheceu ser a *propylamina primaria:*

$$C^3H^7.I \rightarrow C^3H^7.CNO \rightarrow C^3H^7.NH^2,HCl \rightarrow C^3H^7.NH^2$$

Pôde assim obter uma base organica, fervendo a 49°, e que não só por este caracter, como pelo aspecto e forma crystalina do seu chloroplatinato parecia ser identica á base que foi obtida por Mendius (2), fazendo reagir o hydrogenio nascente sobre o cyaneto de ethylo:

$$\underbrace{CN.C^2H^5}_{\substack{\text{Cyaneto}\\ \text{de ethylo}}} \quad \rightarrow \quad \underbrace{NH^2.C^3H^7}_{\substack{\text{Propylamina}\\ \text{primaria}}}$$

Esta amina differia da sua isomera — a *isopropylamina*, preparada por Gautier, em 1868, na acção da agua fortemente acidulada pelo acido chlorhydrico sobre a isopropylcarbylamina (3)

$$\underbrace{CN.CH{<}{\substack{CH^3\\ CH^3}}}_{\text{Isopropylcarbylamina}} + 2H^2O = \underbrace{CH^2O^2}_{\substack{\text{Acido}\\ \text{formico}}} + \underbrace{NH^2.CH{<}{\substack{CH^3\\ CH^3}}}_{\text{Isopropylamina}}$$

não só pelo ponto de ebullição, que para esta é 31°,5-32°,5, como pelo aspecto e forma crystallina do seu chloroplatinato.

Os dois corpos são representados na moderna notação pelas formulas seguintes:

$$\underbrace{(CH^3.CH^2.CH^3)NH^2}_{\text{Propylamina normal; P.E = 49°}} \quad \text{e} \quad \underbrace{{\substack{CH^3\\ CH^3}}{>}CH.NH^2}_{\text{Isopropylamina; P.E = 32°}}$$

(1) *Comptes rendus*, t. LXIX (1869), pag. 473.
(2) *Annalen der Chemie und Pharmacie*, t. CXXI, pag. 129, 1862.
(3) *Comptes rendus*, t. LXVII (1868), pag. 725.

A tranquillidade do paiz onde tinha começado a ser acolhido com tanta benevolencia por WURTZ, em cujo laboratorio fez os trabalhos que acabamos de apontar, ía ser perturbada. Surge o anno terrivel e os desastres da guerra franco-prussiana. R. SILVA, que se achava, na occasião, em Londres e voltou a Paris ao conhecimento dos primeiros desastres, volta pelo conselho de amigos para Londres; e ahi encontra outro chimico, que em França fôra tambem recebido com apreço, o sr. J. M. CRAFTS. Com elle realisa no laboratorio do prof. WILLIAMSON um trabalho sobre a preparação e propriedades do *oxydo de triethylphosphina*, que apparece no Boletim da Sociedade chimica de França, em 1871 (¹).

A triethylphosphina $P(C^2H^5)^3$, pela primeira vez preparada por CAHOURS e HOFMANN na acção do zinco-ethylo sobre o trichloreto de phosphoro, é um liquido incolor, muito movel, menos pesado que a agua, fervente a 127°,5 (pressão de 744^{mm} numa atmosphera de hydrogenio), e que tem a propriedade de se combinar com o oxygenio á temperatura ordinaria; o que explica a elevação de temperatura e os vapores brancos que se formam quando ella se expõe ao ar, dando o phenomeno algumas vezes até origem á combustão do producto.

Para preparar o oxydo de triethylphosphina $P(C^2H^5)^3O$, que tal é o corpo que se forma na reacção, utilisavam-se os residuos solidos da preparação da ethylphosphina, que se depunham na extremidade dos tubos das retortas e nos balões de condensação.

ROBERTO DUARTE SILVA, em collaboração com CRAFTS, indicou um methodo muito mais exacto (²) de preparar o dicto corpo, e que consiste em aquecer o phosphoro (1 p.) com o iodeto de ethylo (30 p.) durante 24 horas, á temperatura de 175-180°; o conteudo do tubo é depois destillado com alcool forte, para expulsar o iodeto de ethylo; e o residuo, misturado com potassa caustica (4 p.), é destillado e em seguida rectificado.

Na primeira parte da reacção, formam-se os iodetos de ethyl-

(¹) *Bulletin de la Société chimique de Paris*, t. XVI, pag. 43.

(²) *A very good method*, dizem ROSCOE e SCHORLEMMER, no seu *A treatise on chemistry*, vol. III, part I, pag 435.

phosphonio e de triethylphosphina, segundo as equações:

$$\underbrace{2P^2}_{\substack{\text{Phos-}\\\text{phoro}}} + \underbrace{11C^2H^5I}_{\substack{\text{Iodeto}\\\text{de ethylo}}} = \underbrace{2P(C^2H^5)^4I}_{\substack{\text{Iodeto de}\\\text{tetraethylphosphonio}}} + \underbrace{P(C^2H^5)^3I^2}_{\substack{\text{Iodeto de}\\\text{triethylphosphina}}} + \underbrace{PI^3}_{\substack{\text{Iodeto}\\\text{de}\\\text{phosphoro}}} + 2I^2 \quad (^1)$$

$$\underbrace{PI^3}_{\substack{\text{Iodeto}\\\text{de}\\\text{phosphoro}}} + \underbrace{2P(C^2H^5)^4I}_{\substack{\text{Iodeto de}\\\text{tetraethylphosphonio}}} + \underbrace{C^2H^5I}_{\substack{\text{Iodeto}\\\text{d'ethylo}}} = \underbrace{3P(C^2H^5)^3I^2}_{\substack{\text{Iodeto de}\\\text{triethylphosphina}}}. \quad (^2)$$

Na segunda parte forma-se iodeto de ethylo; e a destillação dos iodetos com potassa dá o oxydo de triethylphosphina:

$$\underbrace{P(C^2H^5)^3I^2}_{\substack{\text{Iodeto de trie-}\\\text{thylphosphina}}} + \underbrace{2C^2H^5OH}_{\text{Alcool}} = \underbrace{P(C^2H^5)^3O}_{\substack{\text{Oxydo de triethyl-}\\\text{phosphina}}} + \underbrace{2C^2H^5I}_{\substack{\text{Iodeto de}\\\text{ethylo}}} + H^2O$$

$$P(C^2H^5)^3I^2 + \underbrace{2KOH}_{\substack{\text{Potassa}\\\text{caustica}}} = P(C^2H^5)^3O + \underbrace{2KI}_{\substack{\text{Iodeto}\\\text{de potassio}}} + H^2O$$

$$\underbrace{P(C^2H^5)^4I}_{\substack{\text{Iodeto de tetra-}\\\text{ethylphosphonio}}} + KOH = P(C^2H^5)^3O + KO + \underbrace{C^2H^6}_{\text{Ethano}}$$

O oxydo de trethylphosphina crystallisa em longas agulhas brancas, que são muito deliquescentes, e soluveis em todas as proporções no alcool e na agua; funde a 51°,6 e ferve a 243°, segundo as determinações de Silva e Crafts, que modificaram um tanto as anteriores de Hofmann; e, coisa singular, apesar de tão complexo, é um corpo extremamente estavel, não sendo atacado mesmo quando aquecida com acido azotico.

II

O alcool propylico secundario, que fôra obtido por Friedel em 1862, por hydrogenação da acetona, era um corpo interessante, cujo conhecimento era ainda incompleto; importava, es-

---

(1) Resumo das equações:

$$2P + 4C^2H^5I = P(C^2H^5)^4I + PI^3; \quad PI^3 + 3C^2H^5I = P(C^2H^5)^3I^2 + 2I^2.$$

(2) Resumo das duas equações:

$$PI^3 + 3P(C^2H^5)^4I + I^2 = 4P(C^2H^5)^3I^2; \quad P(C^2H^5)^3I^2 + C^2H^5I = P(C^2H^5)^4I + I^2.$$

pecialmente, estudar os seus derivados etheres — os *etheres do isopropylo* — e compara-los com os etheres do alcool propylico normal ou primario.

Este é o primeiro trabalho de conjuncto que tomou sobre si R. Duarte Silva, trabalho que iniciou em 1869.

Preparou primeiro o butyrato e valerato de isopropylo ([1]); e depois o succinato, butyrato, o azotito e o azotato de isopropylo ([2]), e por ultimo o phenato de isopropylo e muitos dos seus derivados bromados ([3]), o formiato, o lactato, o cyanato e o cyanurato de isopropylo ([4]).

O methodo empregado foi o chamado methodo dos saes de prata de Wurtz, que consiste em fazer reagir os iodetos alcoolicos — n'este caso o iodeto de isopropylo — sobre os saes de prata dos acidos.

No caso de acidos monobasicos a reacção formula se assim:

$$\underbrace{R.COO\,Ag}_{\text{Sal de prata d'um acido monobasico}} + \underbrace{I\,CH<^{CH^3}_{CH^3}}_{\text{Iodeto de isopropylo}} = \underbrace{AgI}_{\text{Iodeto de prata}} + \underbrace{R.COO\,.\,CH<^{CH^3}_{CH^3}}_{\text{Ether isopropylico de um acido monobasico}}$$

No caso do acido ser bibasico:

$$\underbrace{R''\left<\begin{array}{l}COO\,Ag\\ \\ COO\,Ag\end{array}\right.}_{\text{Sal de prata de um acido bibasico}} \begin{array}{c} \\ + \\ \\ \end{array} \underbrace{\begin{array}{l}I\,CH<^{CH^3}_{CH^3}\\ \\ I\,CH<^{CH^3}_{CH^3}\end{array}}_{\text{2 mol. de iodeto de isopropylo}} = 2AgI + \underbrace{R''<^{COO.CH.(CH^3)^2}_{COO\ CH.(CH^3)^2}}_{\text{Ether isopropylico de um acido bibasico}}$$

Indicando, com toda a precisão de experimentador cuidadoso, as condições de preparação d'estes corpos, fixou as suas propriedades e particularmente as constantes physicas dos etheres obtidos, que foram determinadas no laboratorio do professor Desains e sob a sua direcção. Eis a summula dos dados adquiridos em relação aos etheres mais importantes.

([1]) *Sur quelque composés isopropyliques: butyrate et valérate de isopropyle*, C. R., t. LXVIII, pag. 1476-1478.

([2]) *Sur quelque composés isopropyliques: Succinate, benzoate, azotite, et azotate d'isopropyle*, C. R. t. LXIX, pag. 416.

([3]) *Bulletin de la Société chimique de Paris*, t. XIII, pag. 27-32.

([4]) *Idem*, t. XVII, pag. 97.

Quadro dos etheres do isopropylo
estudados por R. D. SILVA — (1869)

Nomes	Formula chimica	Estado physico	Densidade	Ponto de ebullição	Indice de ref.
Butyrato de isopropylo........................	$C^4H^7O^2.CH{<}^{CH^3}_{CH^3}$	Liquido	0,8787	128°	1,393
Valerato de isopropylo........	$C^5H^9O^2.CH{<}^{CH^3}_{CH^3}$	»	0,8358	142°	1,397
Succinato de isopropylo...........	$C^4H^4O^4\left(CH{<}^{CH^3}_{CH^3}\right)^2$	»	1,009	228°	1,418
Benzoato de isopropylo........................	$C^7H^5O^2.CH{<}^{CH^3}_{CH^3}$	»	1,054	218°	1,496
Azotito de isopropylo	$NO^2.CH{<}^{CH^3}_{CH^3}$	»	0,856	45°	—
Azotato de isopropylo.........................	$NO^3.CH{<}^{CH^3}_{CH^3}$	»	1,054	101°-102°	1,391

Notou R. D. SILVA que de todos estes etheres um só, o azotito de isopropylo, se decompõe em presença de um carbonato alcalino, e que, quando é humido, tambem se desdobra em presença do chloreto de calcio, dando origem a um desenvolvimento de gaz chlorhydrico; de sorte que, para purificar este azotito, deve lavar-se rapidamente com um leite de cal, e depois ser sêcco sobre o nitrato de calcio fundido e pulverisado.

Tambem observou, ao preparar o ether butyrico, que no começo da operação havia um pequeno desenvolvimento de propyleno [1], e, como consequencia d'isto, forma-se um pouco de acido butyrico, que acompanha o ether que destilla.

Pouco depois de SILVA ter preparado o azotito de isopropylo pelo methodo de WURTZ, um chimico allemão V. MEYER, levando mais longa a reacção, destillando o producto a banho de oleo, em vez de banho-maria, como SILVA tinha empregado, obteve o *nitropropano*.

Os dois corpos são metameros; mas o corpo estudado por SILVA é um verdadeiro ether, e que, como todos os etheres-saes, é hydrolysado pelos alcalis causticos, formando um alcool e um nitrito; e pela acção do hydrogenio se transforma em alcool e ammoniaco:

$$C^3H^7.O.NO \rightarrow C^3H^7.OH + K.ONO \rightarrow C^3H^7.OH + NH^3 + H^2O$$

O nitropropano não é tal, hydrolysado pela potassa, e dissolve-se n'ella sem decomposição; por meio dos reductores transforma-se na propylamina:

$$\underbrace{C^3H^7 - N \begin{matrix} \nearrow O \\ \searrow O \end{matrix}}_{\text{Nitropropano}} \rightarrow \underbrace{C^3H^7.NH^2}_{\text{Propylamina}} + 2H^2O$$

Como se vê pela explicação acima, no ether nitroso, a ligação do carbono com o azoto faz-se por intermedio do oxygenio; nas nitroparaffinas, como no nitropropano, o azote está directamente ligado ao carbono.

---

[1] *Comptes rendus, loco cit.*, pag. 1477.

Estas nitroparaffinas fervem geralmente a uma temperatura muito mais elevada que os ethers nitrosos metalicos.

Diz o Sr. Friedel que R. Silva teve pesar em haver deixado escapar a descoberta de *nitropropano*, que V. Meyer fazia conhecida tres annos depois, em 1872, e que veiu a ser utilisada para a diagnose differencial dos alcooes primarios, secundarios e terciarios.

Todas estas pesquizas foram feitas no Laboratorio de Wurtz.

III

Um outro grupo de trabalhos originaes de R. Silva é o do isopropylo e seus derivados

O *diisopropylo* C^6H^{14}:

$$(CH^3)^2.CH.CH(CH^3)^2,$$

que é o *tetramethylethano symetrico*:

$$\begin{matrix}CH^3\\CH^3\end{matrix}\!\!> C^2H^2 <\!\!\begin{matrix}CH^3\\CH^3\end{matrix}$$

e que tambem se pode considerar como o derivado dimethylico de butano, o 2,3-*dimethylbutano*:

$$\begin{array}{ccccccc} CH^3 & . & CH & . & CH & . & CH^3 \\ & & | & & | & & \\ & & CH^3 & & CH^3 & & \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Diisopropylo}}$$

estava para o radical isopropylo, cujos compostos já tinham por elle sido estudados, como estava o ethano $C^2H^6 = CH^3.CH^3$ para o radical *methylo* CH^3-ou o butano $C^4H^{10} = C^2H^5.C^2H^5$ para o radical ethylo C^2H^5-.

D'ahi o proposito de R. Silva de estudar os processos de preparação do diisopropylo. Effectivamente, reconheceu que elle se forma quando se faz actuar sobre o ether isopropyliodhydrico não só o sodio, como o amalgama de sodio, e a prata dividida.

A reacção dá-se conforme o mechanismo geral da ligação de dois radicaes monovalentes, que se formam pela eleminação de um atomo de iodo a cada uma de duas moleculas do corpo gerador, mechanismo que Wurtz e outros chimicos tinham utilisado:

$$\underbrace{\begin{array}{l}(CH^3)^2 = CH\,I \\ (CH^3)^2 = CH\,I\end{array}}_{\text{2 mol. de iodeto de isopropylo}} + \underbrace{\begin{array}{l}Na\\ Na\end{array}}_{\text{Sodio}} - \underbrace{2NaI}_{\text{Iodeto de sodio}} = \underbrace{\begin{array}{r}(CH^3)^2 = CH \\ | \\ (CH^3)^2 = CH\end{array}}_{\text{Diisopropylo}}$$

A reacção, que fôra estudada já por Schorlemmer, foi melhor illucidada por R. Silva; os dois agentes — iodeto de isopropylo e sodio — fazem-se actuar em presença do ether; mas o ataque não se dá se o ether fôr perfeitamente anhydro, é indispensavel que elle esteja levemente humido.

Fazendo em seguida reagir o chloro sobre o diisopropylo á luz do sol, na ausencia de iodo, obteve dois derivados chlorados isomeros $C^6H^{13}Cl$.

Um é o que hoje se denomina:

2,3-*dimethyl-1-chlorobutano:*

$$\begin{array}{cccc} CH^2Cl\,. & CH\,. & CH\,. & CH^3 \\ & | & | & \\ & CH^3 & CH^3 & \end{array}$$

corpo liquido, fervendo a 124°, e, que como a formula indica, é derivado chlorado primario:

O outro é o que se denomina actualmente:

2,3-*dimethyl-2-chlorobutano:*

$$\begin{array}{cccc} CH^3\,. & CCl\,. & CH\,. & CH^3 \\ & | & | & \\ & CH^3 & CH^3 & \end{array}$$

tambem liquido, fervendo a 118°, e derivado terciario.

Tambem obteve na mesma reacção um corpo bichlorado,

que é o dichlorohexano $C^6H^{12}Cl^2$, ou melhor *dichlorodiisopropylo*, ao qual se dá hoje a formula do derivado biterciario (1), considerando-o como:

2,3-*dimethyl*-2,3-*dichlorobutano:*

$$\begin{array}{cc} CH^3.\underset{\displaystyle CH^3}{\underset{|}{C}}Cl\ .\ \underset{\displaystyle CH^3}{\underset{|}{C}}Cl.CH^3 \end{array}$$

É um corpo solido e crystallisado, e funde a 160°.

Este derivado dichlorado, tratado pelo acetato de prata, dá o respectivo ether diacetico, cuja saponificação não fornece um glycol, como se podia esperar; mas sim um um anhydrido d'esse glycol, uma especie de ether-oxydo, comparavel ao oxydo de ethyleno C^2H^4O ou ao glycido $C^3H^6O^2$, representados pelas formulas de constituição:

$$\underbrace{\begin{array}{l} CH^2 \\ | \quad >O \\ CH^2 \end{array}}_{\text{Oxydo de ethyleno}} \qquad \underbrace{\begin{array}{l} CH^2 \\ | \quad >O \\ CH \\ | \\ CH^2.OH \end{array}}_{\text{Glycido}}$$

O corpo obtido por R. Silva é o:

Oxydiisopropylo, isomero do *oxyhexano* (*oxydo de hexyleno*) $C^6H^{12}O$, e derivado do diisopropylo; é um liquido, fervente a 185°. É tambem isomero da *pinacolina*, *methylpseudobutylacetona* ou *dimethylbutanona* $(CH^3).CO.C(CH^3)^3$, que ferve a 106° e se obtem por meio da pinacona, destillando-a com acido sulfurico diluido, ou por outros meios ainda (1).

Tambem obteve um derivado bibromado, o *dibromodiisopropylo* $C^6H^{12}Br^2$; e ainda um novo carboneto saturado em C^9, a que chamou:

Pentamethylbutano C^9H^{20}, que é hoje designado pelo nome

(1) *Ergänzungsbände zur dritten Auflage des* Beilstein's *Handbuchs der organischen Chemie von P.* Jacobson, t. I, pag. 36 e 510.

de 2,3,5-*trimethylhexano*, e que se fórma, conjuntamente com pequena quantidade de diisopropylo, propano e propyleno, aquecendo o iodeto de isopropylo com amalgama de sodio (1).

Para comprehender a formação d'este carboneto, deve imaginar-se a associação de dois radicaes isopropylos a um de propyleno (2):

$$\underbrace{\begin{matrix}CH^3\\CH^3\end{matrix}\!>CH}_{\text{Isopropylo}} - \ldots\quad \underbrace{-\underset{\displaystyle CH^3}{\underset{|}{CH}}-CH^2-}_{\text{Propyleno}}\ldots\quad \underbrace{-CH<\begin{matrix}CH^3\\CH^3\end{matrix}}_{\text{Isopropylo}}$$

de sorte que se forma:

$$\underbrace{CH^3.\underset{\displaystyle CH^3}{\underset{|}{CH}}\;.\;\underset{\displaystyle CH^3}{\underset{|}{CH}}\;.\;CH^2\;.\;\underset{\displaystyle CH^3}{\underset{|}{CH}}\;.\;CH^3}_{\text{Pentamethylbutano (R. Silva)}}$$

em que, de facto, ha 5 radicaes methylos associados ao grupo C^4H^5 do butano.

Poderia tambem admittir-se que, em vez do propyleno, o carboneto em questão resultasse do propylideno, associando a si os dois isopropylos

$$\begin{matrix}CH^3\\CH^3\end{matrix}\!> CH\;.\;\overset{\displaystyle CH^3}{\overset{|}{\underset{\displaystyle CH^3}{\underset{|}{C}}}}\;.\;CH < \begin{matrix}CH^3\\CH^3\end{matrix}$$

e o carboneto, que seria então uma vez terciario e duas vezes

(1) *Bulletin de la Societé chimique de Paris*, t. XVIII, pag. 529; t. XXII p. 50.

(2) Roscoe and Schorlemmer, *A tratease on chemistry*, vol. III, Part. I, London, 1881, pag. 659.

secundario, poderia considerar-se derivado, do pentano ou do methano:

$$\underbrace{\begin{array}{ccccc} & & CH^3 & & \\ & & | & & \\ CH^3\ . & CH\ . & C\ . & CH\ . & CH^3 \\ & | & | & | & \\ & CH^3 & CH^3 . & CH^3 . & \end{array}}_{\beta\gamma\gamma\delta\ -\ \text{Tetramelhylpentano}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\begin{array}{ccc} & CH^3 & \\ & | & \\ C^3H^7\,(\text{iso}) - & C & - C^3H^7\,(\text{iso}) \\ & | & \\ & CH^3 & \end{array}}_{\text{Dimethyldiisopropylmethano;}}$$

e é assim que elle vem citado em alguns tratados de chimica organica ([1]).

É um corpo liquido, cujo ponto de ebullição é 130°.

(Continua).

([1]) BEILSTEIN, *Handbuch der organisch. Chemie*, 3.ª Aufl., t. I, pag. 105; RICHTER, *Lexikon der Kohlenstoffverbindungen*, t. I, 1900, pag. 644.

O CAPITALISMO E AS SUAS ORIGENS EM PORTUGAL

POR

BENTO CARQUEJA

I

A propriedade capitalista

A evolução economica tem feito modificar sensivelmente o papel do *capital*.

Foi, primeiramente, modesto instrumento do trabalhador normal; depois, apartou-se d'elle, a pouco e pouco, e passou para as mãos dos ricos. De simples instrumento de producção passou a ser, frequentemente, instrumento de luxo [1].

Este novo regimen social, a que os socialistas chamam *capitalismo*, representa uma das phases mais interessantes do mundo moral moderno, no qual os factores economicos não são a unica causa dominadora, por isso que aos factores ideologicos cabe tambem um papel importante. A civilisação não póde provir do materialismo sem conforto, do determinismo fatalista, fontes em que a democracia social alimenta o seu pessimismo cruel; só a evolução, com os seus processos discretos mas seguros, pode encaminhar á civilisação progressiva [2].

---

[1] CH. GIDE, *Principes d'économie politique.*
[2] L. FIORENTINI, *La evoluzione del socialismo alla fine del secolo XIX.*

Estudar o problema do *capitalismo* consiste precisamente em estudar todos os factores da producção, porque todos elles se combinam para essa resultante commum. Não o comprehenderam assim os physiocratas, que só consideravam a terra como factor da producção, porque lhes parecia que só ella dava mais do que recebia; mas o seu exclusivismo não tem hoje a menor razão de existencia, porque, se no trabalho e no capital ha apenas transformações, a propria agricultura não faz senão transformar as materias contidas no solo, na atmosphera, nos adubos, etc., utilisando as forças naturaes.

Ao estudarmos o problema do *capitalismo*, esforçar-nos-hemos por olhar os diversos factores com imparcialidade, procurando reduzir, até onde seja possivel, aos seus elementos fundamentaes os phenomenos complexos da propriedade capitalista.

Vejamos, em primeiro logar, como se constituiu a riqueza capitalista.

É incontestavel que a economia da terra livre é substancialmente diversa da economia da terra occupada: a terra livre exclue a possibilidade da renda e, portanto, a formação da propriedade capitalista. Para o homem selvagem, a terra livre póde ser tratada sem capital; mas, para o homem civilisado, a cultura sem capital é impossivel.

Loria oppõe a esta affirmação a observação dos immigrantes, que, não possuindo coisa alguma, immediatamente, sem qualquer periodo de aprendizado industrial e sem atravessarem o trabalho salariado, passam da condição de proletarios á de proprietarios independentes ([1]).

Loria admitte que, sob o regimen da terra livre, o trabalhador póde produzir capital, com o qual póde proseguir na producção, augmentando-a progressivamente; e, d'esta maneira, ainda que os outros elementos naturaes sejam inaccessiveis a esse mesmo trabalhador, este, occupando a terra, assegura para si uma existencia independente e foge á necessidade de vender o seu trabalho por uma retribuição. Insiste ainda Loria em que o facto de os operarios das cidades não se disporem bem a dedicar-se á agricultura, transferindo-se para terras desoccupadas, não passa de um pro-

([1]) A. Loria, *Il capitalismo e la scienza*, pag. 91.

ducto psychologico, resultante da impossibilidade, em que elles têem estado, de adquirir alguns bens prediaes ([1]).

Em todo o caso, se não ha termo de comparação entre o esforço do lavrador para a apropriação da terra e o esforço do productor de capitaes para se abster do consumo d'esses mesmos capitaes, póde bem calcular-se o esforço que teria de realisar o lavrador passando a productor de capitaes.

O que é certo é que a historia e a estatistica nos ensinam que a propriedade capitalista se tem formado, em todos os povos e em todas as idades, pela suppressão da terra livre. Emquanto subsistirem terras livres e cada qual pudér, á sua vontade, occupar uma parte de sólo e consagrar-lhe o seu trabalho, a propriedade capitalista é impossivel, porque ninguem está disposto a trabalhar para outrem, quando possa estabelecer-se, por conta propria, n'um terreno sem valor. Em taes condições, a fórma economica consiste na *propriedade para os trabalhadores*, isto é, uma pequena propriedade para os agricultores e para artistas independentes.

Mas, como observa LORIA n'uma outra sua obra ([2]), esta fórma economica, que impede a exploração do homem pelo homem, envolve tambem a associação do trabalho, e, portanto, o desenvolvimento energico, o progresso racional da producção; por outro lado, não podem constituir-se associações espontaneas entre os proprietarios trabalhadores, porque a isso se oppõe o espirito de independencia d'elles.

A evolução economica obriga, pois, a transformar essa fórma primitiva, substituindo-a por outra mais efficaz, que permitta a associação do trabalho.

E que essa transformação se opera não soffre a menor duvida. Que é o *homestead*, nos Estados Unidos? É nada menos do que o reconhecimento aos immigrantes do direito de propriedade sobre diversos tratos de terreno, por um preço nominal, com a unica condição de o arrotearem e de o explorarem depois, durante cinco annos.

É assim que nasce a propriedade, isenta, segundo a opinião dos socialistas, de vicios de origem, e convenientemente dividida

---

([1]) A. LORIA, *Costituzione economica odierna*, pag. 396.
([2]) A. LORIA, *Problèmes sociaux contemporains*, pag. 70.

em predios de extensão sufficiente,— «a propriedade, emfim, resgatando-se para com a collectividade do valor preexistente á exploração individual, que o sólo póde ter, de modo que os acrescimos de valores posteriores são perfeitamente, como facto ordinario, os fructos directos do trabalho do occupante» ([1]).

A suppressão da terra livre, diz Loria, terá logar segundo methodos que variam em relação com o grau de densidade da população; se esta fôr pouco numerosa, será preciso, para amarrar o homem á terra, arrastal-o e reduzil-o á escravidão, ao passo que, augmentando a densidade da população, basta que o pequeno numero de dominadores possua todo o sólo, para que fique garantida a persistencia da economia capitalista. Mas, seja qual fôr o processo pelo qual se obtenha a suppressão da terra livre, essa suppressão não deixará, em caso algum, de ser a base unica da propriedade separada do trabalho, da scisão da humanidade em uma classe de heroes e outra de párias, n'um numero restricto de triumphadores e uma enorme massa de vassallos ([2]).

O que é certo é que os progressos constantes do socialismo scientifico, em todos os paizes, tanto da Europa como da America, vão procurando diminuir, dia a dia, a importancia das differentes doutrinas, que, propozeram resolver a questão social pela nacionalisação do sólo, mantendo a propriedade particular do capital mobiliario. Todavia, essas doutrinas têem ainda adeptos fervorosos. Basta-lhes, na America, o influxo de Henry George, cujas obras têem todas uma fórma verdadeiramente fascinadora e basta-lhes, em Inglaterra, o *landlordismo*, com as suas ligas para a reforma agraria e com o collectivismo agrario, a que o proprio Herbert Spencer se mostrou favoravel ([3]). Emquanto assim succeder, taes doutrinas não desapparecerão.

Os economistas allemães contemporaneos affirmam a necessidade de limitar a divisão de propriedade do sólo, no interesse da communidade. Adolpho Wagner reclama até a nacionalisação de toda a propriedade urbana. Stein, Schaeffle e outros entendem que a causa primaria de todos os males está na distribuição viciosa do sólo, na sua apropriação privada e não nas fórmas ge-

(1) P. Cauvès, *Cours d'économie politique*, III, pag. 398.
(2) A. Loria, *Problèmes sociaux contemporains*, pag. 71.
(3) H. Spencer, *Social statics*.

raes da producção. As criticas d'esses socialistas de cathedra serviram e contribuiram para introduzir na Allemanha as ideias de HENRY GEORGE, que inspiraram a um publicista, STAMM, e a um industrial, FLURSCHEIM, a fundação d'uma *Deutsche Landliga*, em 1886; dissolvida essa Liga, transformou-se em uma associação para a reforma da propriedade predial, da qual sahiu uma associação suissa, a *Frei Land*.

Segundo a opinião expressa por FLURSCHEIM nas suas obras (¹) a causa principal de todos os males sociaes não está na fórma da producção capitalista, no facto de que alguns individuos possam possuir capital e empregal-o, como lhes aprouver, na producção; está, sim, no facto de que mesmo o excesso dos capitaes, ou, pelo menos, uma parte d'elle ache emprego e esse emprego seja realisado fóra da producção, isto é, em collocações prediaes. Esta é, na opinião de FLURSCHEIM, a causa das crises, a origem do mal-estar social, que ha-de persistir, emquanto não fôr defeso ao capital achar collocação na terra, emquanto não fôr obrigado a empregar-se exclusivamente na industria.

N'um rasgo de phantasia, FLURSCHEIM crê que, no dia em que se conseguisse a realisação d'este ideal, o consumo augmentaria, a super-producção desappareceria, e, portanto, desappareceriam tambem as consequencias d'ella.

Previsões identicas faz ASTURARO, antevendo a substituição da propriedade particular pela collectivisação dos meios de producção. «Em breve tempo, diz, a fórma economica vigente cederá o logar a outra mais perfeita; n'esse momento, eliminados os ultimos monopolios, realisar-se-hão as condições necessarias á valorisação dos productos em trabalho e a nova fórma economica traduzirá o ideal do valor. O conceito da troca, no ultimo estado da sua evolução, substituir-se-ha por um conceito superior. As mercadorias valorisar-se-hão em trabalho, quando deixarem de ser mercadorias. Á troca industrial succederá necessariamente a reciprocidade dos serviços em trabalho e da compensação entre o individuo e a sociedade. Este novo conceito iniciará tambem a sua evolução; com o augmento da riqueza social e por virtude das novas relações economicas e do altruismo, a fórmula *a cada*

(¹) *Der einzige Rettungsweg, Deutschland in 100 Jahren, Papst und Social reform, Bansteine.*

um o seu trabalho substituir-se-ha por outra: *cada um segundo as suas forças e a cada um segundo as suas necessidades.* Esta será a formula-limite da economia e, talvez, da propria especie humana» ([1]).

Em nosso entender, a collectivisação absoluta da propriedade é um sonho; mas não duvidamos de que a evolução economica opere uma grande transformação no regimen da propriedade.

E consideramos um sonho a collectivisação absoluta da propriedade porque a evolução historica, da idade média para cá, a contraría. A divisão dos grandes dominios senhoriaes, as leis austriacas de 1880, protectoras da pequena industria fundiaria, o desapparecimento da *mezzadria* italiana, o exemplo de nações como a França, a Inglaterra, os Estados Unidos e a Australia demonstram tendencias, que não conduzem, positivamente, á collectivisação absoluta da propriedade.

Na opinião de Alfred Fouillée, nem o individualismo nem o socialismo resolvem o problema da propriedade, com verdadeiro rigor scientifico; «ha em toda a propriedade, diz, theoricamente considerada, uma parte individual e uma parte social; na prática, a exacta distribuição d'essas partes supporia uma *medida* absoluta do que é devido a cada um, segundo as suas obras; mas tal *justiça distributiva* é uma chimera e, por isso, tem de lançar-se mão de convenções assentes em medias geraes» ([2]).

É claro que para o anarchismo nenhuma d'estas soluções é acceitavel, porque, considerando os anarchistas a propriedade como producto do roubo, da fraude e do direito da força, para elles «as reformas propostas não passam de cantigas para adormecer os explorados; para obviar aos males, que se pretende curar, é preciso atacar a origem principal, a organisação proprietaria e capitalista» ([3]).

Se do regimen da propriedade passarmos ao regimen industrial, verificaremos que, pela concentração dos capitaes, á grande industria está necessariamente reservado um papel dominante, pois, podendo contentar-se com menores lucros, ha-de levar vantagens sobre a pequena industria.

([1]) Asturaro, *La sociologia e le scienze sociali*, IV, pag. 51 e seg.
([2]) A. Fouillée, *La propriété sociale et la démocratie*, pag. 64.
([3]) J. Grave, *La société mourante*, pag. 50.

É certo que a larga divulgação da grande industria havia de trazer comsigo uma lucta de concorrencia de cada vez mais accesa; mas a concentração das emprezas industriaes, que hoje se manifesta intensamente, por toda a parte, vem contrariar poderosamente esse effeito. Na opinião de CAUWÈS, «a concentração dos capitaes, sob a fórma de associações cooperativas, é um dos termos concebiveis da evolução economica» ([1]).

Convem não esquecer um dos factores importantes nas suas relações com o capitalismo — o *credito.*

Não foi a divisão do trabalho nem a acquisição de ferramentas aperfeiçoadas, que precederam a concentração do capital, como, á primeira vista, se poderia julgar; não foi o orgão que creou a funcção capitalista; succedeu exactamente o contrario. «O primeiro apparecimento do capital, isto é, d'uma riqueza que produz ao seu possuidor um rendimento, independentemente do seu trabalho, precedeu e não seguiu a primeira apparição da divisão do trabalho. Foi a funcção capitalista que primeiro creou a manufactura» ([2]).

Assim, devemos attribuir ao credito uma funcção dominante no actual movimento economico; é, sem duvida, o principal instrumento de que se soccorre o commercio do nosso tempo para se expandir pela fórma assombrosa por que o vemos desenvolver-se. Nasceu o credito no dia em que as riquezas futuras, ainda não existentes, que constituem o seu verdadeiro fim, foram por qualquer fórma realisadas e postas ao alcance do commercio, por meio de titulos negociaveis ([3]); mas, para que o credito attingisse as proporções extraordinarias, que hoje se lhe reconhecem, foi preciso que «o desenvolvimento do espirito commercial moderno e uma civilisação mais adiantada provocassem um augmento de confiança, consideravel e continuo» ([4]).

O ambito do credito foi sensivelmente accrescentado e as funcções d'elle amplamente melhoradas com a organisação das *clearing-houses*, camaras de compensação ou liquidação, cuja essencia representa verdadeiramente uma applicação aperfeiçoada

---

(1) P. CAUWÈS, *Cours d'économie politique*, III, pag. 278.
(2) HENRI HAUSER, *Revue d'économie politique*, 16.° anno, n.° 4, pag. 313.
(3) CH. GIDE, *Principes d'économie politique*, pag. 333.
(4) HENRY WOOD, *The political economy of natural law*, pag. 214.

do systema da conta corrente, combinado, a maior parte das vezes, com o systema de contra-partidas ([1]).

É certo que, com o auxilio do credito, os productores e negociantes conseguem realisar os seus capitaes e renoval-os rapidamente; mas não póde admittir-se a doutrina d'aquelles que sustentam, com MACLEOD ([2]), que o credito multiplica capitaes. Sustentar isto corresponderia a pretender que contrahir uma divida equivale a crear um capital. Para defender similhante these é preciso ter uma noção erronea do que seja riqueza.

Nas operações de credito ha mobilisação, mas não augmento da somma de capitaes; se o credito faz chegar os capitaes a mãos mais activas e facilita a transformação das riquezas, não póde contribuir para que o prestamista e o mutuario sejam ambos anniquilados. Este ultimo utilisa o capital, com exclusão do primeiro ([3]).

LÉON WALRAS estabeleceu muito nitidamente as leis que presidem á formação de novos capitaes, leis que são as seguintes:

1.° Produz-se a alta ou a baixa da taxa do rendimento, segundo a offerta dos capitaes e dos rendimentos novos em numerario fôr superior ou inferior ao pedido.

2.ª Augmenta-se ou diminue-se a quantidade dos capitaes e dos rendimentos novos, segundo o preço da venda fôr superior ou inferior ao preço do custo.

3.ª A identidade das taxas do rendimento é a condição da utilidade maxima dos capitaes e rendimentos novos ([4]).

Em consequencia da intervenção da moeda, as noções de *capital* e de *credito* são essencialmente quantitativas.

Do que deixamos summariamente exposto póde concluir-se que o capitalismo offerece deficiencias, quer se encare pelo lado da propriedade da terra, quer pelo da organisação industrial.

Como se corrigirão essas deficiencias? Hão de corrigir-se, sem duvida, interessando efficazmente o operario no resultado da producção.

([1]) AUG. ARNAUNÉ, *La monnaie, le crédit et le change*, pag. 405.
([2]) MACLEOD, *The theory of credit*, 1889; e *Theory and practice of banking*, 1892.
([3]) P. CAUWÈS, *Cours d'économie politique*, II, pag. 265.
([4]) L. WALRAS, *Études d'économie politique appliquée (theorie de la production de la richesse sociale)*, pag. 335.

Com esse intuito, LORIA pensou na creação do que elle chama *salario territorial* e que defende contra os ataques dos economistas allemães e italianos, assegurando que esse *salario* não faria subir demasiadamente o valor da terra, porque, no seu intender, serviria até para pôr cobro ao processo das avaliações exaggeradas (1).

Em nosso intender, não é preciso crear o salario territorial. Bastará restringir a propriedade ociosa, como fonte de rendimentos importantes, e immediatamente o operario irá ficando interessado nos resultados da producção da terra. D'esta forma, a extensão da propriedade individual ampliar-se-ha, de cada vez mais, e os trabalhadores transformar-se-hão successivamente em proprietarios.

Por outro lado, ao passo que o progresso industrial vae contribuindo poderosamente para diminuir a retribuição necessaria do capital, augmenta successivamente a do trabalho.

E, d'esta forma, podemos antevêr que o aperfeiçoamento dos machinismos, a divisão do trabalho e a concentração crescente dos instrumentos de trabalho hão-de conduzir necessariamente a uma nova sociedade, gerada no seio da nossa sociedade capitalista.

Examinadas assim, summariamente, as bases em que o capitalismo assenta e estudada a evolução economica, que o caracterisa, passaremos em revista as doutrinas de algumas escolas economicas, a respeito d'esta importante materia.

II

Critica das escolas economicas

O problema do capitalismo ficaria muito incompletamente estudado, se não considerassemos os pontos de vista diversos sob que foi olhado pelas escholas economicas, que prescindem da analyse integral da terra livre, e pelo socialismo.

D'essa investigação vae resultar reconhecer-se que as theorias

---

(1) A. LORIA, *Il capitalismo e la scienza*, pag. 260 e seg.

economicas difficilmente podem explicar os complexos phenomenos da propriedade capitalista e que na theoria da terra livre se encontra um poderoso instrumento de dissecção social.

Entremos, porém, na analyse, que nos cumpre fazer, das duas theorias.

Os economistas resumiram, outr'ora, a analyse e a justificação da propriedade na affirmação de que o lucro do capital é a compensação da abstinencia do capitalista. Desagradou, todavia, a alguns similhante allegação; entre elles, póde citar-se MARSHALL, que pretendia definir o lucro como compensação, não da abstinencia, mas da paciencia ou da espectativa *(waiting)* do capitalista (¹).

Devemos confessar, porém, que, por mais louvores que possam merecer estas duas maneiras de definir, ha n'ellas mais um jogo de palavras do que a analyse fria e imparcial dos factos; dedevemos reconhecer tambem que nem uma nem outra nos mostram a essencia da renda capitalista.

BOHM-BAWERK procurou uma solução mais transcendente. Affirma que o operario não faz mais do que trocar bens futuros por bens presentes e que, tendo sempre uma certa quantidade de bens futuros menor valor do que igual quantidade de bens presentes, d'esta fórma a equação, que toda a troca requer, em relação á quantidade dada e recebida, não fica garantida senão quando o capitalista receba uma quantidade de bens futuros maior do que a quantidade de bens presentes que deu, isto é, receba um excedente, que constitue precisamente o *lucro* (²).

Para se reconhecer o que vale esta theoria, em relação ás que a antecederam, basta notar que se funda sobre a noção da *troca* e o caracter essencial da troca é a *igualdade quantitativa* da riqueza dada e da riqueza recebida (visto que ambas capitalisam igual quantidade de trabalho aggregado) e a *differença qualitativa*, porque n'esta reside a razão da permuta.

Ao contrario d'isto, o processo capitalista tem por caracter essencial a *igualdade qualitativa* do producto dado e do producto recebido (pois é certo que o capitalista antecipa uma somma

(¹) MARSHALL, *Principles of economics*, pag. 290.
(²) BOHM-BAWERK, *Positive theorie des kapitales.*

em moeda, para obter, ao fim de um dado praso, uma massa de mercadorias, que troca contra moeda) e a *differença quantitativa*, a qual constitue precisamente o *lucro* (¹).

Ha, pois, n'esta theoria uma confusão de phenomenos relativos á troca, que são, de natureza, essencialmente oppostos.

Demais, se passarmos a examinar a theoria de BOHM-BAWERK, sob a feição operaria, em vez de a considerarmos sob o ponto de vista capitalista, mais absurda nos parecerá.

Effectivamente, póde haver ideia mais extravagante do que a de figurar o operario como vendedor de bens futuros?

A nossa legislação civil estabelece que o proprietario póde alienar a *sua* propriedade, por qualquer dos modos por que esta póde ser adquirida (²). Ora, o operario, na sua qualidade de proletario, não possue bens presentes, nem se presume que venha a possuir bens futuros, porque com o seu trabalho isolado não póde produzir coisa alguma e porque todas as riquezas, que produzir com o trabalho reunido ao capital serão propriedade d'aquelles por quem o capital foi antecipado. Como poderá, pois, vender bens futuros a quem quer que seja? O operario dispõe dos seus musculos, da sua força, do seu trabalho e só isso póde dar ao capitalista e ao lavrador, em troca do pão de que ha-de alimentar-se e da roupa com que ha-de cobrir-se. A essa fórmula singela mas rude se reduz, em ultima analyse, o contracto do salario.

RICCA-SALERNO, vindo em auxilio da theoria de BOHM-BAWERK, admitte, como elle, a troca de bens futuros por bens presentes; mas restringe que isso só é verdadeiro quando e onde a organisação operaria fôr perfeita. Quer dizer que, para o operario isolado, o producto futuro é muito afastado, e não é praticavel a producção independente; em taes condições, esse producto «seria puramente theorico e inefficaz, como valor, se não se lhe substituisse outro mais concreto e mais pratico, isto é, o sacrificio do trabalho correspondente» (³). Isto quer dizer que, em taes circumstancias, a relação do salario não é uma venda do salario

(¹) K. MARX, *Das kapital*, secção III.
(²) *Codigo Civil Portuguez*, art. 2357.°
(³) RICCA-SALERNO, *La teoria del salario nella storie delle dottrine e dei fatti economici*, pag. 43.

contra productos, mas contra capital, como os economistas classicos sempre proclamaram. SALERNO opina que, por virtude das uniões, «ligando-se, por uma fórma collectiva, as varias especies de trabalho, relativo ao exercicio de uma dada industria, póde valorisar-se a remuneração total, em relação com o resultado da producção; e, d'este modo, o salario normal, em todas as suas graduações, é determinado tambem pelos trabalhadores directamente, á face da differença do valor comparativo entre a antecipação presente e o producto futuro» (1).

Como se vê, esta theoria tem, pelo criterio do proprio auctor, uma applicação restricta a nações privilegiadas e, demais, na organisação operaria, que elle pretende, ha manifesta confusão entre a formação de associações operarias de resistencia e formação de associações technicas de trabalho, que são, de facto, diversas e independentes das primeiras. É, de resto, pouco admissivel que o facto technico da associação do trabalho venha a coincidir com o facto social da organisação unionista dos operarios, pois a historia ensina que a primeira precede em muitos seculos a segunda e que, ainda hoje, na grande maioria dos Estados, existe a primeira, sem que a segunda esteja ainda estabelecida (2). E, resta perguntar, as associações technicas ou organisações unionistas dos operarios poderão tornal-os capazes de discriminar o valor do producto futuro e de exigir um salario a elle correspondente?

As *Trades-Unions* téem exercido sobre o contracto do salario uma influencia bem manifesta, mas puramente quantitativa, que permitte aos operarios suspenderem, durante um periodo mais ou menos consideravel, a offerta do trabalho e exigirem do capitalista um preço mais remunerador.

Se tentarmos apreciar á luz das ideias de RICCA-SALERNO o problema da distribuição capitalista das riquezas, encontrar-nos-hemos perante uma serie de interrogações, a que não achamos solução.

Taes doutrinas não conseguem, effectivamente, explicar porque podem uns viver sem trabalhar e outros são obrigados, para poderem viver, a pedir-lhes o capital e a trabalhar para esse fim, até ao completo esgotamento.

(1) RICCA-SALERNO, op. cit., pag. 58.
(2) A. LORIA, *Il capitalismo e la scienza*, pag. 8.

Vejamos agora uma outra phase da questão, aquella que lhe deram alguns economistas modernos, que defendem a justiça da quantidade do lucro e do salario e que consideram o lucro como producto especifico do capital e o salario como producto do trabalho puro.

Um economista inglez, Clark, tem o seu nome especialmente ligado a essa ordem de ideias (1).

Inspirou-se Clark em duas proposições fundamentaes de Thunen: 1.ª Onde exista terra livre, o decrescimento da productividade dos capitaes successivos reverte em vantagem exclusiva do operario, por isso que a prova do lucro é determinada pelo incremente do producto devido á ultima unidade do capital empregado e os productos differenciaes das unidades productoras acrescem integralmente ao salario. 2.ª O salario do trabalho é determinado pelo augmento do producto devido ao ultimo operario empregado na empreza e estabelece-se segundo esta medida, conforme existir ou não existir a terra livre (2).

Como se vê, a sorte do operario é, nas duas phases economicas, inteiramente diversa: no caso de a terra ser livre, o productor do capital deve abster-se da annexação de novos operarios á empreza, em um momento muito anterior áquelle em que se deterá, se a terra fôr occupada, pois, n'esta segunda phase, o operario, privado de opção, é obrigado a empregar-se na empreza do capitalista, para colher o seu salario; ao passo que, na primeira phase, o operario, podendo estabelecer-se de sua conta em uma terra livre, recusa-se a empregar-se na empreza do capitalista, quando o augmento do producto, a que o seu emprego dér logar e, conseguintemente, o seu salario, attinjam um nivel baixo.

Clark, adoptando as duas proposições de Thunen, supprime, porém, o caracter relativo ou subordinado ás condições de occupação do territorio e affirma, sem mais considerações, a plena e invariavel applicabilidade, quer a condição da terra seja livre, quer seja occupada. Affirma Clark que o decrescimento da productividade do capital redunda em augmento de salario, o qual, portanto, equivale ao que resta do producto complexo, depois

(1) Clark, *The distribution of wealth*, 1899.
(2) Thunen, *Der isolirte Staat*, II, 1.º, pag. 104.

de deduzido o lucro total, na proporção determinada pelo augmento do producto devido ao ultimo capital empregado.

Clark, para demonstrar a sua theoria, admitte que o capital technico (c) 100 e um só operario (o) podem dar os seguintes productos variaveis:

1.ª	hypothese	— 100 c	com	1 o	produz	100
2.ª	»	— 100 c	»	1 o	»	100 + 98
3.ª	»	— 100 c	»	1 o	»	100 + 17
4.ª	»	— 100 c	»	1 o	»	100 + 15.

A percentagem do lucro, diz Clark, é 15 %; o lucro total é 60 e o salario é 90.

As ideias de Clark têem sido vigorosamente contestadas, em mais de um ponto, não se justificando, especialmente, o asserto de que o decrescimento da productividade dos capitaes successivos redunde sempre no augmento de mercadorias, por isso que este phenomeno é só possivel no caso de a terra ser livre. Estando totalmente occupada a terra, a que sancção poderá, effectivamente, recorrer o operario para exigir, em sua propria vantagem, a differença de producto dos capitaes successivamente empregados?

E o emprego de operarios, cuja productividade seja decrescente, é incompativel com as condições geraes da terra occupada, que são as que predominam no nosso tempo.

Se se attender a que o producto do trabalho puro é indeterminavel e a que, no regimen da terra occupada, a retribuição do trabalho se estabeleceu, sem se attender á sua producção, apenas pelo arbitrio do capitalista, seremos levados a concluir que as doutrinas de Clark se não conformam com a realidade das coisas, especialmente quando estudados os phenomenos na sua essencia.

Se d'esse campo passarmos para a analyse mais profunda e objectiva da questão, nos dominios do socialismo puro, encontraremos diante dos olhos vasto caminho a trilhar.

Abre-nos esse caminho o grande pensador Karl Marx, para o qual, como se sabe, ha apenas duas fórmas de constituição economica — a economia com salariado, que representa a actualidade, e a economia collectivista, que representa a fórma-limite da economia, o limite para o qual tende.

É claro que, na discussão da legitimidade do direito de propriedade, tudo se resume a demonstrar que a fórma-limite assim designada, o collectivismo, exclue o lucro do capital. Mas não é facil a empreza, porque a organisação da propriedade collectiva não faz desapparecer a renda por accumulação.

Como se sabe, a base da doutrina social de Marx é a chamada *lei da accumulação capitalista* e foi por esse lado que principalmente o atacou o seu feroz critico Franz Oppenheimer.

Essa lei é a descripção do mecanismo, que faz nascer o *exercito da reserva;* é a base da theoria da miseria crescente *(verelendungstheorie)* e da theoria dos cataclysmos sociaes *(zusammenbruschstheorie);* sobre essa lei foi edificado o collectivismo.

Marx conseguiu provar, por uma serie de factos, que o operario não carece de trabalhar um dia inteiro para obter os generos necessarios á sua existencia e á da sua familia; calculando em seis horas o tempo de *trabalho necessario* para provêr ás subsistencias, nas outras seis horas de trabalho produz um excedente *(mehrwerth)*, em beneficio dos que o empregam. É d'esse excedente, embolsado pelo patrão, que, segundo Marx, nasce o capital.

Não considerou Karl Marx o lucro do capital e, por isso, collocado na impossibilidade de determinar a formação natural do lucro, teve de fundar a sua critica sobre a affirmação de que nos productos não ha senão trabalho encorporado.

Á theoria de Marx oppõe Loria a sua concepção da *terra livre*. Loria affirma que, por esta fórma, fica annullada a possibilidade de lucro devido á accumulação, em si, porque ao lavrador que accumula é attribuida renda igual á do lavrador que não accumula (1).

Acha Loria que o mais fecundo resultado d'esta doutrina é pôr termo á distincção subtil e capciosa entre valor do trabalho e força de trabalho, que lhe parece puro bysantismo.

Resta-nos examinar a orientação seguida pela escola do socialismo agrario.

As theorias de Henry George têem pontos de contacto com as de Ricardo. Henry George considera a necessidade de proceder á cultura das terras mais estereis, como resultado natural do augmento da população e como producto do mau proceder

(1) A. Loria, *Il capitalismo e la scienze,* pag. 41.

dos proprietarios, que abandonam a cultura das terras melhores, á espera de que augmentem de valor. Na theoria de Ricardo, os proprietarios aproveitam inactivos o decrescimento da margem das culturas. No espirito de Henry George influem poderosamente os processos adaptaveis aos paizes novos: em todo o caso, cabe-lhe o ter feito entrar em consideração a população no phenomeno da renda.

Póde affirmar-se que as ideias de Henry George exerceram sobre a theoria ricardiana da renda uma influencia identica á que os escriptos de Lassalle imprimiram sobre a theoria ricardiana do salario.

Para Flurscheim, a propriedade fundiaria exclusiva não é unicamente a base da renda, nem se limita a exercer sobre o lucro uma influencia meramente quantitativa: é a propria base do lucro (1). Reconhece, por outras palavras, que a essencia da constituição economica, igualitaria ou capitalista, está na existencia ou na suppressão da terra livre.

O systema de Oppenheimer é essencialmente theorico. Affirma que, emquanto houver terras occupaveis, é impossivel a formação da economia capitalista sobre a base do salariado e bem assim a repartição dos productos em proporção igual para os productores do capital e para o trabalhador ou trabalhadores, que se lhe associem (2).

Perante as divergencias das diversas escolas, permanece incontroverso um facto importante: — a actual tendencia para uma alliança contractual, de cada vez mais accentuada, e para uma liberdade individual sempre maior.

Por isso, tudo quanto possa contribuir para contrariar essa tendencia ha-de necessariamente levantar protestos. O proprio collectivismo, que julgava ser a chave da solução de muitos problemas sociaes, esse mesmo é rejeitado, por não satisfazer a todas as exigencias da solução que se pretende (3).

---

(1) Flurscheim, *Rent, interest and wages*, pag. 53.

(2) Oppenheimer, *Das grossgrundeigenthum und die soziale Frage*.

(3) «O socialismo não quer crear uma reacção nova, seja ella qual fôr. O individuo deve ser livre, não no sentido metaphysico, como sonham os anarchistas, isto é, livre de todos os deveres para com a communidade; mas sim livre de todo o constrangimento economico nos seus movimentos e na escolha da sua profissão». Bernstein, *Socialisme théorique et social-démocratie pratique*, pag. 223.

O socialismo puro define nas seguintes formulas as suas aspirações, em materia de distribuição de riqueza:

—a rapidez de accumulação da fortuna particular propria d'uma organisação de propriedade similhante a um titulo de accumulação deve ter duração limitada ao que fôr necessario e sufficiente.

—a maior igualdade de todos nas condições iniciaes artificiaes da concorrencia e a intensidade e extensão sempre menores das influencias mais activas impeditivas da redistribuição devida á especulação prejudicial.

—eliminação gradual e continua de todo o parasitismo, isto é devolução, em quantidade sempre maior, á communidade das rendas ricardianas differenciaes, naturaes ou adquiridas.

—passagem á communidade e á gratuidade dos instrumentos de producção e de antecipação subsistente (capital-salario) isto é, conjugação do trabalhador com o seu instrumento de producção (1).

O cooperativismo ha-de preparar soluções, que de outra forma seriam difficeis de encontrar, sem produzirem commoções violentas, e os seus effeitos começam já a manifestar-se nas nações mais adiantadas, com as Uniões agrarias na Allemanha, os Syndicatos agricolas em França, e diversas instituições similares na Italia, que fazem reverter para a terra abundantes capitaes.

E, assim, ao mesmo tempo que a propriedade capitalista manterá as suas regalias, as classes proletarias irão colhendo novos fructos da sua actividade, apesar de os socialistas intransigentes affirmarem que «a classe operaria é excluida dos progressos, que são obra sua, e as condições da vida melhoram mais rapidamente para a burguezia do que para o proletariado» (2).

O desenvolvimento do cooperativismo demonstra uma forte vitalidade nas classes trabalhadoras, pois patenteia que, vendo-se na impossibilidade, perante o regimen actual, de affrontar directamente a grande difficuldade da falta de capitaes, especialmente na grande industria, procuram na cooperação os elementos de que carecem. O exito completo das *Working Class Limiteds* e das *Wholesales*, é um facto por demais conhecido (3).

---

(1) E. Rignano, *Di un socialismo in accordo colla dottrina economica liberale*, pag 227.
(2) Katsky, *Le marxisme*, pag. 224.
(3) B. Potter, *The cooperative movement in Great Britain.*

As cooperativas de producção não offerecem, realmente, qualquer meio de dar capital ao operario; mas facultam a este reservas para accumular os capitaes necessarios á sua cooperativa.

E, a par d'essa organisação cooperativista, ha-de necessariamente aperfeiçoar-se o regimen da propriedade.

A sociedade, no seu advento gradual para um estado mais consciente ha-de tornar-se cada vez mais utilitarista; por isso, dará preferencia á fórma de propriedade, que garanta os maximos beneficios ao maior numero, rejeitando, portanto, a que contrarie essa tendencia [1].

Pelo que diz respeito ao direito de testar, esta materia ha-de constituir sempre um ponto agudo de discussão, por isso que até mesmo das concepções do socialismo ás do anarchismo vae uma grande distancia [2]. Opta-se por uma transacção entre as escholas extremas, estabelecendo restricções ao direito de testar, quer pelo augmento consideravel dos direitos de transmissão, quer animando a diffusão das riquezas, em harmonia com as ideias de STUART MILL, tornando assim impossivel as grandes aggregações da propriedade, quer, finalmente fazendo usufruir o Estado uma parte das heranças, com o decorrer dos tempos, como mais de uma vez tem sido proposto.

E, modificado assim, em geral, o regimen da propriedade, apresentará a questão social novos aspectos, que mais a aproximarão das soluções tão debatidas, mas tão insistentemente procuradas.

Feito este rapido exame sobre o vasto problema capitalista, que na forma actual da organização social tem primaria importancia, vamos entrar numa série de investigações, tendentes a determinar as origens do capitalismo moderno em Portugal.

D'esta fórma, poderemos reconhecer até que ponto as doutrinas, que procuramos esboçar, téem applicação ao nosso paiz.

(Continúa).

---

(1) «O direito individual de propriedade não póde ser fundado senão na utilidade commum e geral do exercicio d'esse direito, utilidade que póde variar segundo os tempos». SAINT SIMON, *Vues sur la propriété*.

(2) «O direito de herença não passa, em summa, de ser um direito ao ocio e ao parasitismo. MALON, *Le socialisme intégral*, I, 272.

SUR UNE TRANSFORMATION D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES BINÔMES

PAR

M. E. Jahnke

(Professeur à l'Académie des Mine de Berlin)

On doit à Briot et Bouquet des recherches profondes sur les équations différentielles de la forme $\left(\frac{du}{dz}\right)^n = f(u)$ dans le cas que des fonctions monodromes doublement périodiques en forment les intégrales. Plus tard, les différents types de ces équations binômes ont été regagnés par M. E. Netto, L. Fuchs et moi au moyen des procédés tout à-fait algébriques.

On pourrait citer encore Legendre, Minding, Richelot, A. Picart, Roethig et d'autres qui, en réduisant des intégrales abéliennes à des intégrales elliptiques, ont traité le même type d'équations différentielles.

L'équation de troisième degré qui a la forme élégante

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 = P_3^2(u),$$

$P_3(u)$ désignant un polynôme cubique, est d'un intérêt particulier. Pour l'intégrer, j'ai exposé une méthode qui, sans faire usage des racines de $P_3(u) = 0$, conduit à une formule de transformation $u = \varphi(s)$, $s = \wp(z)$, où la valeur de la fonction Weier-

STRASSIENNE $s=\infty$ correspond aux valeurs arbitraires $z=z_0$, $u=u_0$ [1]. Mais, pour arriver à ce but, il faut introduire comme intermédiaire une fonction elliptique y de deuxième degré de sorte qu'à la valeur $u=\infty$ correspond la valeur $y=\infty$. Une remarque de FERDINAND CASPARY [2] m'a fait étudier comment éviter ce détour *sans déranger la symétrie des formules.*

On peut, il est vrai, éviter ce détour en choisissant, dans la note citée, une des racines de $P_3(u)=0$ au lieu de la valeur arbitraire u_0. Mais les formules de transformation qui en résultent, font voir une dissymétrie relative aux dites racines laquelle est hors de la nature du problème.

Dans cette note je vais montrer qu'on peut transformer *immédiatement* la fonction u dans la fonction WEIERSTRASSIENNE $s=\wp(z)$ en exprimant s^3 comme quotient d'un covariant et de sa dérivée d'une forme cubique binaire. Ce résultat est analogue au résultat bien connu de HERMITE qui a réussi à réduire l'équation différentielle de *deuxième* degré à la forme WEIERSTRASSIENNE en se servant d'un covariant d'une forme biquadratique [3].

---

(1) *Zeitschrift für Math. U. Ph.* 35, 376-380. 1890.

(2) CASPARY m'a communiqué, le 23 août 1893, le résultat élégant que voici :

«Es werde gesetzt

$$s^3=(A-B)^3(A-C)^3\frac{(w-B)(w-C)}{(w-A)^2},$$

dann ist

$$3s^2ds=\frac{(A-B)^3(A-C)^3}{(w-A)^3}U\,dw,$$

$$\sqrt{4s^3+(B-C)^2(C-A)^2(A-B)^2}=\frac{(A-B)(A-C)}{w-A}U,$$

wo

$$U=(B+C-2A)w+CA+AB-2BC;$$

folglich

$$\frac{3ds}{\sqrt{4s^3+(B-C)^2(C-A)^2(A-B)^2}}=\frac{dw}{\sqrt[3]{(w-A)^2(w-B)^2(w-C)^2}}\text{»}.$$

(3) *Crelles Journal,* 52, 8; 1856. Il mérite d'être signalé que la forme WEIERSTRASSIENNE de l'équation différentielle de deuxième degré se trouve déjà dans cette note de HERMITE.

A la fin de la note je donnerai une extension de ce résultat à une classe d'équations différentielles binômes dont les intégrales sont des fonctions abéliennes. Même dans ce cas plus général, les formules de transformation conservent leur forme symétrique.

Soit donnée la forme cubique binaire

$$P = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3,$$

son covariant de deuxième degré

$$C = (a_0x + a_1y)(a_2x + a_3y) - (a_1x + a_2y)^2$$

et la dérivée de C, prise par x:

$$C'_x = 2(a_0a_2 - a_1^2)x + (a_0a_3 - a_1a_2)y.$$

Choisissons $x = u$, $y = 1$,

$$u_0 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{2(a_0a_2 - a_1^2)},$$

$$b_0 = a_0u_0 + a_1, \quad b_1 = a_1u_0 + a_2, \quad b_2 = a_2u_0 + a_3,$$

les deux covariants prennent la forme

$$C(u) = (a_0u + a_1)(a_2u + a_3) - (a_1u + a_2)^2,$$
$$C'(u) = 2(a_0a_2 - a_1^2)(u - u_0),$$

et le discriminant de P

$$g_3 = 4(a_0a_2 - a_1^2)(a_1a_3 - a_2^2) - (a_1a_2 - a_0a_3)^2$$

peut être mis sous la forme

$$g_3 = 4(a_0a_2 - a_1^2)(b_0b_2 - b_1^2) = 4(a_0a_2 - a_1^2)\,C(u_0),$$

puisque

$$C(u_0) = b_0 b_2 - b_1^2.$$

Alors posons

$$s^3 = \frac{C(u_0)\,C(u)}{(u-u_0)^2}.$$

En substituant pour le moment $\frac{1}{u-u_0} = v$, cette formule devient

(1) $$s^3 = C(u_0)\,C(v),$$

où

$$C(v) = (b_0 v + a_0)(b_2 v + a_2) - (b_1 v + a_1)^2.$$

D'une part, la résolution de l'équation (1), quadratique en v, fournit

$$2v(b_0b_2-b_1^2)+a_0b_2+a_2b_0-2a_1b_1=\{(4b_0b_2-b_1^2)C(v)+$$
$$+(a_0b_2+a_2b_0-2a_1b_1)^2-4(a_0a_2-a_1^2)(b_0b_2-b_1^2)\}^{1/2},$$

d'où, en profitant des notations introduites et de l'identité $a_0b_2+a_2b_0-2a_1b_1=0$, il suit

$$2v\,C(u_0) = \sqrt{4C(u_0)\,C(v)-g_3}$$
$$= \sqrt{4s^3-g_3}$$

ou

$$2v\,C(u_0) = \sqrt{S},$$

en posant

$$S = 4s^3 - g_3.$$

D'autre part, la différentiation de l'équation (1) par rapport

à s et v donne

$$3s^2 ds = C(u_0)\, dC(v).$$

Cette formule se transforme à cause de la relation $dC(v) = \sqrt{S}\, dv$ en

$$3s^2 ds = C(u_0) \sqrt{S}\, dv$$

ou

$$\frac{3ds}{\sqrt{S}} = \frac{dv \sqrt[3]{C(u_0)}}{\sqrt[3]{C^2(v)}}.$$

En remplaçant enfin v par $\dfrac{1}{u - u_0}$ et en ayant égard aux relations

$$u - u_0 = \frac{C'(u)}{2(a_0 a_2 - a_1^2)},$$

$$C(u) = (u - u_0)^2 C(v),$$

$$C(u_0) = \frac{g_3}{4(a_0 a_2 - a_1^2)},$$

nous obtenons

$$\frac{du \sqrt[3]{g_3(a_0 a_2 - a_1^2)}}{\sqrt[3]{C^2(u)\, C'^2(u)}} + \frac{3ds}{\sqrt{S}} = 0,$$

d'où résulte, en posant

$$(a_0 a_2 - a_1^2) g_3 = G,$$

la forme définitive de l'équation différentielle:

$$\frac{du \sqrt[3]{G}}{\sqrt[3]{C^2(u)\, C'^2(u)}} + \frac{3ds}{\sqrt{S}} = 0. \tag{2}$$

En résumé nous pouvons prononcer le théorème suivant:

L'équation différentielle cubique

$$G\left(\frac{du}{dz}\right)^3 = C^2(u)\,C'^2(u),$$

où

$$C(u) = (a_0u + a_1)(a_2u + a_3) - (a_1u + a_2)^2,$$
$$C'(u) = 2(a_0a_2 - a_1^2)u + a_0a_3 - a_1a_2,$$
$$G = (a_0a_2 - a_1^2)g_3,$$
$$g_3 = 4(a_0a_2 - a_1^2)(a_1a_3 - a_2^2) - (a_1a_2 - a_0a_3)^2$$

se transforme dans l'équation différentielle de Weierstrass

$$9\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = 4s^3 - g_3$$

au moyen de la formule de transformation

$$s^3 = \frac{G\,C(u)}{C'^2(u)},$$

de sorte qu'à la valeur numérique $s = \infty$ correspond la valeur $u = u_0$, où

$$u_0 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{2(a_0a_2 - a_1^2)}.$$

En comparant ce résultat aux formules que j'ai établies dans la note citée ci-dessus, il mérite d'être signalé que là c'est aux valeurs $z = z_0$, $u = u_0$ prises arbitrairement, qu'ici c'est aux valeurs $z = z_0$, $u = u_0$ données par les constantes de l'équation différentielle que correspond la valeur numérique $s = \infty$. Voilà la même différence qui existe entre la transformation li-

néaire, à laquelle F. Caspary (1) à donné une forme très élégante, et la transformation quadratique due à **Weierstrass**, des équations différentielles de deuxième degré.

On voit aisément comment ce théorème peut être généralisé à des équations différentielles binômes d'un dégré plus haut et dont les intégrales cessent d'être elliptiques. Nous nous contentons d'indiquer le résultat suivant, en conservant la notation ci-dessus:

L'équation différentielle du degré μ

$$G^{\nu}\left(\frac{du}{dz}\right)^{\mu}=C^{\mu-\nu}(u)\,C'^{2\nu}(u).$$

où μ,ν désignent des nombres entiers, se transforme dans l'équation différentielle de deuxième degré

$$\mu^{2}\left(\frac{ds}{dz}\right)^{2}=4s^{\mu}-g_{3}$$

au moyen de la formule de transformation

$$s^{\mu}=\frac{G^{\nu}C^{\nu}(u)}{C'^{2\nu}(u)},$$

de sorte que la valeur $u=u_0$ correspond à $s=\infty$.

Berlin, 29 octobre 1905.

(1) *Journ. de Math.* (4) 5, 73-79, 1889.

NOTA SOBRE OS COEFFICIENTES DAS FORMULAS DE «WARING»

POR

J. B. DE ALMEIDA AREZ

(Tenente de Engenheria)

I — Nesta nota vamos fazer conhecer algumas propriedades dos coefficientes das formulas de WARING:

$$(1) \qquad s_n = \sum n \frac{(-1)^i (i-1)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} p_1^{\alpha} p_2^{\beta} \ldots p_m^{\lambda}$$

e

$$(2) \qquad p_n = \sum \frac{(-1)^i}{\alpha,\beta,\ldots\lambda!} \left(\frac{s_1}{1}\right)^{\alpha} \left(\frac{s_2}{2}\right)^{\beta} \ldots \left(\frac{s_n}{n}\right)^{\lambda},$$

onde o sommatorio se estende a todos os valores inteiros, positivos ou nullos, de α, β, ... λ que verificam a condição

$$\alpha + 2\beta + \ldots + m\lambda = n,$$

onde é

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = i$$

e onde por s_n designamos a somma

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_m^n,$$

sendo x_1, $x_2 \dots x_m$ as m raizes da equação:

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_m = 0.$$

II — Consideremos a identidade

$$\operatorname{Log} x - \operatorname{Log}(1+x) = \operatorname{Log}\frac{x}{1+x} = \operatorname{Log}\left(1 - \frac{1}{1+x}\right).$$

Derivando n vezes e applicando para isso ás funcções $y = \log u$, $u = 1 - \dfrac{1}{1+x}$ a formula conhecida [1]

$$y^{(n)} = \sum \frac{n!\, f^{(i)}(u)\, u'^{\alpha}\, u''^{\beta} \dots (u^{(n)})^{\lambda}}{\alpha!\, \beta! \dots \lambda!\, (2!)^{\beta} (3!)^{\gamma} \dots (n!)^{\lambda}},$$

onde α, β, ..., λ representam as soluções inteiras, positivas ou nullas, da equação

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots + n\lambda = n,$$

e onde é

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda = i,$$

a qual determina a derivada rèlativamente a x da funcção y definida pelas equações $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, deduz-se a identidade seguinte:

$$(-1)^{n-1}(n-1)!\left[\frac{1}{x^n} - \frac{1}{(1+x)^n}\right]$$

$$= \sum \frac{n!(-1)^{i-1}(i-1)!}{\alpha!\beta!\dots\lambda!}\left(\frac{1+x}{x}\right)^i \left[\frac{1}{(1+x)^2}\right]^{\alpha} \left[\frac{-1}{(1+x)^3}\right]^{\beta} \dots \left[\frac{(-1)^{n-1}}{(1+x)^{n+1}}\right]^{\lambda}$$

---

(1) Vej. Gomes Teixeira, *Curso de Analyse* (Calculo differencial), cap. V.

e portanto

$$\frac{(1+x)^n}{x^n} - 1 = \sum n \frac{(i-1)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!} \frac{1}{x^i},$$

ou, mudando x em $\frac{1}{x}$,

$$(1+x)^n - 1 = \sum n \frac{(i-1)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!} x^i.$$

D'esta formula deduz-se, em primeiro logar, pondo $x=1$, a seguinte:

$$(3) \qquad 2^n - 1 = \sum n \frac{(i-1)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!},$$

que determina a somma dos valores absolutos de todos os coefficientes de (1), suppondo n'esta formula $n \gtreqless m$.

Deduz-se da mesma formula, egualando os coefficientes das mesmas potencias de x nos dois membros, a seguinte:

$$(3') \qquad \binom{n}{i} = \sum{}' n \frac{(i-1)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!},$$

que determina a somma dos valores absolutos dos coefficientes da formula considerada em que i tem um mesmo valor.

Por ser

$$\binom{n}{n-i} = \sum{}' n \frac{(n-i-1)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!}$$

e

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i},$$

vê-se que a somma dos valores absolutos dos coefficientes da formula de Waring, correspondentes aos termos em que a

somma dos expoentes de p_1, p_2, etc. é egual a i, tem o mesmo valor que a somma dos que correspondem aos termos em que a somma dos mesmos expoentes é egual a $n-i$.

Derivando n vezes a identidade

$$-\log x = \log \frac{1}{x},$$

empregando para obter a derivada do segundo membro a formula geral acima escripta, pondo, para isso, $y = \log u$, $u = x^{-1}$, vem

$$(4) \qquad -1 = \sum n \frac{(-1)^i (i-1)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!}.$$

Das formulas (3) e (4) deduz-se que *a somma dos coefficientes positivos da formula* (1) *é egual a* $2^{n-1}-1$ *e a dos negativos a* 2^{n-1} (*se fôr* $n \leq m$).

III — Para estudar os coefficientes da formula (2) partimos das identidades

$$x = e^{\log x}$$

e

$$\frac{1}{x} = e^{-\log x}.$$

Da primeira deduz-se (sendo $n \gtreqless 2$)

$$0 = \sum \frac{(-1)^i}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!} \left(\frac{1}{1}\right)^\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^\beta \cdots \left(\frac{1}{n}\right)^\lambda$$

e da segunda

$$-1 = \sum \frac{1}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!} \left(\frac{1}{1}\right)^\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^\beta \cdots \left(\frac{1}{n}\right)^\lambda,$$

d'onde: *a somma dos coefficientes positivos da formula* (2) *é egual a somma dos coefficientes negativos e egual a* $\frac{1}{2}$ (suppõe-se $n \gtreqless 2$).

Podiamos deduzir este theorema partindo da conhecida formula de Cotes

As formulas

$$s_1 = -p_1$$
$$s_2 = p_1^2 - 2p^2$$
$$s_2 = -p_1^3 + 3p_1p_2 - 3p_3$$
$$s_4 = p_1^4 - 4p_1^2p_2 + 4p_1p_3 + 2p_2^2 - 4p_4$$
. . . .

e

$$p_1 = -s_1$$
$$p_2 = \frac{1}{2}s_1^2 - \frac{1}{2}s_2$$
$$p_3 = -\frac{1}{2.3}s_1^3 + \frac{1}{2}s_1s_2 - \frac{1}{3}s_3$$
$$p_4 = -\frac{1}{2.3.4}s_1^4 - \frac{1}{2.2}s_1^2s_2 + \frac{1}{3}s_1s_3 + \frac{1}{2^2 2}s_2^2 - \frac{1}{4}s_4.$$
. . . .

que se encontram em quasi todos os tratados de Algebra, permittem verificar os resultados que aqui apresentamos.

Nota. — A formula (3′) dá tambem a seguinte:

$$\frac{(n-1)!}{(i-1)!}\binom{n}{i} = \Sigma' \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}$$

que traduz uma propriedade dos coefficientes de uma formula relativa ao desenvolvimento das funcções implicitas, dada pelo sr. dr. Gomes Teixeira no *Journal de Mathématique* de Liouville (3.ª série, t. VII).

APPLICATION D'UN THÉORÈME CONNU SUR LA MULTIPLICATION DE DEUX MATRICES À LA GÉOMÉTRIE POLYDIMENSIONALE

PAR

P. H. Schoute

(Professeur à l'Université de Groningue)

---

1. Considérons dans l'espace linéaire E_{kp+p-2} à $kp+p-2$ dimensions la courbe rationnelle C^{kp+p-2} représentée par rapport à un système de coordonnées homogènes x_i, $(i=0, 1, \ldots, kp+p-2)$ par les équations

$$\rho x_i = \lambda^i, (i=0, 1, \ldots, kp+p-2) \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Désignons par ${}^{kp-1}E_{kp-2}$ un espace E_{kp-2} contenant $kp-1$ points de la courbe C^{kp+p-2}.

Alors on a le théorème:

«Le lieu des espaces ${}^{kp-1}E_{kp-2}$ de la courbe C^{kp+p-2} passant par un espace E_{k-2} donné est une variété conique V^p_{kp+p-3} de l'ordre p à $kp+p-3$ dimensions, dont E_{k-2} tient lieu de sommet».

Commençons par démontrer que le lieu cherché admet en effet $kp+p-3$ dimensions. A cette fin nous remarquons que chaque E_{kp-2} contient ∞^{kp-2} points, ce qui involve que les ∞^{kp-1} espaces ${}^{kp-1}E_{kp-2}$ contiennent ∞^{2kp-3} points. D'un autre côté il est évident que la condition de passer par l'espace E_{k-2} donné équivaut à celle de passer par $k-1$ points indépendants, tandis qu'à leur tours chacune de ces $k-1$ conditions que l'espace E_{kp-2} de E_{kp+p-2} passe par un point donné équivaut

à p conditions simples, de manière qu'on impose $(k-1)p$ conditions simples à cet E_{kp-2}, si on le contraint à passer par l'espace E_{k-2} donné. Donc le nombre des points contenus dans les espaces ${}^{kp-1}E_{kp-2}$ passant par E_{k-2} est $\infty^{2kp-3} : \infty^{(k-1)p} = \infty^{kp+p-3}$. Ainsi le lieu cherché a $kp+p-3$ dimensions, ce qui implique qu'il est représenté en E_{kp+p-2} par une équation unique. C'est la déduction de cette équation qui va nous occuper à présent.

Un point quelconque P de l'espace ${}^{kp-1}E_{kp-2}$ déterminé par les $kp-1$ points de C^{kp+p-2} correspondants aux valeurs déterminées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{kp-1}$ du paramètre λ est représenté par les équations

$$\rho x^i = m_1\lambda_1{}^i + m_2\lambda_2{}^i + \ldots + m_{kp-1}\lambda^i{}_{kp-1}, \; (i=0,1,\ldots,kp+p-2), \quad (2)$$

les $kp-1$ quantités $m_1, m_2, \ldots, m_{kp-1}$ variant d'un point P à l'autre.

Si $y_i^{(1)}, y_i^{(2)}, \ldots, y_i^{(k-1)}$ sont les coordonnées de $k-1$ points indépendants $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(k-1)}$ de E_{k-2}, les conditions que ce même espace ${}^{kp-1}E_{kp-2}$ passe par $P^{(1)}, P^{(2)} \ldots, P^{(k-1)}$ et donc par E_{k-2} sont

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{(s)} y_i^{(s)} = m_1^{(s)}\lambda_1{}^i + m_2^{(s)}\lambda_2{}^i + \ldots + m_{kp-1}{}^{(s)}\lambda_{kp-1}{}^i, \\ (i=0, 1, \ldots, kp+p-2) \; (s=1, 2, \ldots, k-1) \end{array}\right\} \ldots \quad (3)$$

Le nombre des équations (2) et (3) est $k(kp+p-1)$ et surpasse donc d'une unité le nombre $(k+1)(kp-1)$ des inconnues λ_i, m_i, $m_i^{(s)}$. L'élimination de ces $(k+1)(kp-1)$ inconnues entre les $k(kp+p-1)$ équations fait trouver l'équation cherchée.

Nous démontrons que le résultat de l'élimination en question prend la forme $\Delta_{k.p} = 0$, où $\Delta_{k.p}$ représente le déterminant à kp lignes et colonnes que l'on obtient en faisant suivre aux p lignes en x du schéma

$$\left|\begin{array}{ccccc} x_1 & x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_{kp-1} \\ x_1 & x_2 & x_2 & \ldots\ldots & x_{kp} \\ x_2 & x_3 & x_4 & \ldots\ldots & x_{kp+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{p-1} & x_p & x_{p+1} & \ldots\ldots & x_{kp+p-2} \end{array}\right|$$

les $k-1$ groupes de p lignes analogues, où les x_i ont été remplacées successivement par les $y_i^{(s)}$. En effet, en substituant en $\Delta_{k,p}$ les valeurs de x_1 et de $y_i^{(s)}$ tirées de (2) et de (3) on trouve que l'expression $\rho^p \sigma_{(1)}{}^p \sigma_{(2)}{}^p \ldots \sigma_{(k-1)}{}^p \Delta_{k,p}$ est égale aux produits de deux matrices $M^{(1)}{}_{kp,kp-1}$, $M^{(2)}{}_{kp,kp-1}$ à kp lignes et $kp-1$ colonnes, dont l'une $M^{(1)}$ admet les kp lignes

$$| \lambda_1{}^i \quad \lambda_2{}^i \quad \lambda_3{}^i \quad \ldots \quad \lambda_{kp+1}{}^i |,$$
$$(i=0, 1, \ldots, kp-1)$$

tandis que l'autre $M^{(2)}$ s'obtient en faisant suivre aux p lignes en m_i du schéma

$$\begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & \ldots\ldots & m_{kp-1} \\ m_1\lambda_1 & m_2\lambda_2 & m_3\lambda_3 & \ldots\ldots & m_{kp-1}\lambda_{kp-1} \\ m_1\lambda_1^2 & m_2\lambda_2^2 & m_3\lambda_3^2 & \ldots\ldots & u_{kp-1}\lambda_{kp-1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_1\lambda_1^{p-1} & m_2\lambda_2^{p-1} & m_3\lambda_1^{p-1} & \ldots\ldots & m_{kp-1}\lambda_{kp-1}^{p-1} \end{vmatrix}$$

les $k-p$ groupes de p lignes analogues, où les m ont été remplacées successivement par les $m^{(s)}$ correspondantes. Et d'après un théorème connu le produit de ces deux matrices $M_{kp,kp-1}{}^{(1)}$, $M_{kp,kp-1}{}^{(2)}$ disparaît identiquement, le nombre kp des lignes surpassant le nombre $kp-1$ des colonnes. Évidemment la démonstration de ce théorème auxiliaire se déduit de la remarque que le produit des deux matrices $M_{kp,kp-1}{}^{(1)}$, $M_{kp,kp-1}{}^{(2)}$ est égal à celui des deux déterminants $D_{kp}{}^{(1)}$, $D_{kp}{}^{(2)}$ à kp lignes et colonnes que l'on obtient en ajoutant à chacune des deux matrices une colonne composée d'éléments zéro.

Après la substitution en $\Delta_{k,p}$ des valeurs des x_1 tirées de (1), ce déterminant possède p lignes égales

$$| 1 \quad \lambda \quad \lambda^2 \quad \ldots\ldots \quad \lambda^{kp-1} |;$$

donc la courbe C^{kp+p-2} est une courbe multiple d'ordre de multiplicité $p-1$ du lieu cherché. D'un autre côté la substitution

$x_i = y_i^{(s)}$ donne à $\Delta_{k,p}$ p couples de lignes égales. Donc le lieu cherché est un espace conique dont chacun des points $P^{(s)}$ est un sommet. Ainsi le théorème posé est démontré.

Nous terminons par la remarque que la variété conique V_{k-1}^{kp+p-2} de l'ordre $kp + p - 2$ à $k - 1$ dimensions qui est le lieu des espaces E_{k-1} passant par l'espace-sommet E_{k-2} et un point variable de la courbe C^{kp+k-2} est une variété multiple de l'ordre de multiplicité $p - 1$ du lieu trouvé V^{p}_{kp+p-3}.

CONFÉRENCE FAITE AU MUSEUM DE PARIS
A L'OCCASION DE LA VISITE DE S. M. LE ROI DE PORTUGAL D. CARLOS I

PAR

M. H. Moissan

Sire :
Monsieur le Président de la République :

Il y a une douzaine d'années, un froid de $-50°$ était difficile à réaliser pratiquement dans le laboratoire, aujourd'hui nous descendons facilement avec l'air liquide et l'hydrogène à $-257°$.

Il en est de même pour les températures élevées. A la même époque, il était difficile de maintenir longtemps une expérience à une température de 1300 à 1400°. Le chalumeau oxhydrique fournissait au maximum 1800 degrés centigrades, mais la combustion de l'hydrogène dans l'oxygène, produisant un milieu oxydant, limitait le nombre des expériences.

Avec le four électrique, nous pouvons atteindre aujourd'hui des températures qui, d'après M. Violle, sont voisines de 3500°.

On savait, depuis Humphry Davy, qui a découvert l'arc électrique, que sa température était très élevée, mais on ne possédait pas d'appareil pratique de laboratoire permettant d'utiliser cette source énorme de chaleur.

Le four que nous avons imaginé n'a pour lui que son extrême simplicité. Il consiste en un bloc de carbonate de chaux portant une cavité pour recevoir le creuset et deux rainures pour laisser passer les électrodes. Un couvercle, de même substance, forme réverbère et réfléchit la chaleur sur le creuset.

Au moyen de cet appareil, nous avons pu démontrer qu'il n'existe plus de corps réfractaires. Les corps simples ou composés sont tous liquéfiés, puis volatilisés. A cette haute température, nous faisons bouillir la chaux, la magnésie, le cristal de roche, le platine, le cuivre, l'or et le fer.

Un grand nombre de composés vont se détruire à cette température élevée, mais par contre, nous allons obtenir de nouvelles séries de composés stables dans ces conditions: tels les borures, les siliciures, et les carbures. Et c'est ainsi que nous avons préparé, avec facilité, dans ce four électrique, le carbure de calcium, point de départ de l'industrie de l'acétylène.

L'étude générale de ces carbures métalliques nous a conduit à une nouvelle théorie de la formation des pétroles.

De même, nous avons obtenu, avec facilité et en grande quantité, les métaux réfractaires dont certains n'étaient que des curiosités de laboratoire comme le chrome, le manganèse, le tungstène, le molybdène, le vanadium et le titane. Ces métaux se préparent aujourd'hui, industriellement au four électrique sous forme d'alliages avec le fer.

C'est aussi au moyen de cet appareil que nous avons pu préparer des kilogrammes de ce curieux métal l'uranium, dont mon cher confrère, M. Becquerel, vous entretenait il y a un instant.

Le four électrique nous a permis aussi d'étudier les différentes variétés de carbone et de démontrer comment on pouvait passer du carbone amorphe au graphite, et du graphite au diamant.

Pour obtenir le graphite, il suffit de chauffer une variété quelconque de carbone à la température du four électrique.

Pour réaliser la synthèse du diamant, il faut dissoudre le carbone dans le fer à une température voisine de 3000°. On plonge ensuite brusquement le métal en fusion dans l'eau froide. Dans ces conditions, il se forme autour du métal, une croûte extérieure solide, et la partie intérieure encore liquide se comprime en augmentant de volume et produit quelques parcelles de carbone cristallisé sous la forme diamant.

Ces expériences nous conduisent à de nouvelles conclusions. Le four électrique réalise les conditions reculées de la première période géologique de la terre au moment où notre planète était encore incandescente. Tout le carbone et tout l'azote du règne animal et du règne végétal se trouvaient alors à l'état de carbures et d'azotures métalliques. Ces corps se sont décomposés

lorsque par suite du refroidissement de la terre, l'eau s'est produite à sa surface. Ils ont donné naissance à l'ammoniaque et au gaz carbonique utilisés pour le développement de la cellule vivante.

Enfin ces expériences peuvent élucider une autre grande question. Les astronomes discutent sur la température du soleil. Or comme cet astre est formé d'une masse en fusion produite par les mêmes corps simples que notre terre, tous ces corps sont à une température inférieure à 3500°, température maximum de notre four électrique. Nous avons démontré en effet que à cette température les corps les plus réfractaires entraient en ébullition et se transformaient en corps gazeux.

En conséquence, la température des couches extérieures du soleil ne doit pas atteindre cette température de 3500°.

FORMACION NATURAL DE LA HEMOGLOBINA

POR

JOSÉ R. CARRACIDO
(Catedratico en la Universidad de Madrid)

La materia albuminoidea que tiñe de color rojo los eritrocitos de la sangre, se supone constituida por la asociacion de una proteina denominada *globina*, y un grupo prostético, por el cual ejerce el cromoproteido la funcion respiratoria, denominado *hematina*.

Fúndase esta suposicion en los resultados que se obtienen tratando convenientemente por los ácidos ó por los álcalis la hemoglobina y la oxihemoglobina.

$$\text{Hemoglobina} = \text{Globina} + \underbrace{C^{32}H^{32}N^{4}FeO^{3}}_{\text{Hemocromógeno}}$$

$$\text{Oxihemoglobina} = \text{Globina} + \underbrace{C^{32}H^{32}N^{4}FeO^{4}}_{\text{Hematina}}$$

¿Bastan los resultados de la descomposicion efectuada por los ácidos ó por los álcalis para afirmar que los cuerpos resultantes son los que integran la molécula del cromoproteido?

Las moléculas complejas deben ser imaginadas como organismos constituidos por miembros que se enlazan mediante articulaciones, y al emplear reactivos para inquirir su estructura es muy posible que actúen, no como el escalpelo del disector

que va cortando las naturales coyanturas, sino como el hacha del carnicero que brutalmente reduce à trozos el cuerpo del animal sin tomar en cuenta las articulaciones. Segun muchos quimicos, principalmente los alemanes, la barita empleada por Schützenberger en la pesquisa de la estructura de las moléculas albuminoideas actúa como el hacha que destruye, y no como el escalpelo que diseca.

Los ácidos y los álcalis que descomponen la hemoglobina y su combinacion oxidada en la forma arriba expuesta actúan sobre las moléculas que escinden como escalpelo ó como hacha?

Los datos hasta hoy adquiridos inducen à sostener que el hemocromógeno y la hematina son los grupos prostéticos de la forma reducida y de la oxidada del proteido respiratorio. Sus mútuas relaciones como diferentes grados de oxidacion de un núcleo persistente, y sobre todo, la sintesis del cromoproteido realizada por Bertin-Sans y Moitessier asociando la hematina y la globina son testimonios muy valiosos de que los mencionados reactivos no destrozan, sino que disecan la molécula.

Pero atenuando el valor de los testimonios aducidos existen otros no tomados en cuenta, que no están en conformidad con lo que hoy se admite respecto à la constitucion del pigmento del eritrocito, y cuando se presentan hechos que no tienen cabida dentro del plano de los conceptos corrientes es forzoso hacer nuevo trazado, porque la ciencia no puede admittir casos ilegales. Las protestas que tienen fundamento real inmediatamente derrocan la legalidad estatuida por respetable que sea su historia.

*

* *

Siendo la funcion de la hemoglobina tomar oxigeno del medio ambiente para llevarlo à la intimidad de los tejidos, se supuso que el hierro contenido en el cromoproteido era el agente de cambio de aquel elemento por la facil transformacion de los compuestos ferrosos en férricos, y viceversa, ganando ó perdiendo oxigeno; y saliendo en la descomposicion del albuminoide respiratorio todo el hierro en el grupo prostético, se afirmó, como consecuencia bien deducida, que el hemocromógeno y la hema-

tina son respectivamente, por el átomo metálico que contienen, el receptor y el conductor del oxigeno en las fases sucesívas del proceso respiratorio.

El cálculo pone de manifiesto que la cantidad de oxigeno absorbida por la hemoglobina es cuatro veces mayor que la que puede absorber el hierro en ella contenido pasando al grado máximo de oxidacion, y ante esta diferencia ya no se pudo sostener que aquel elemento metálico era el único que realizaba la fijacion del oxigeno. Sabiendo ademas que el hemocromógeno al convertirse en hematina toma una cantidad de oxigeno inferior à la que absorbe la hemoglobina cuando se transforma en oxihemoglobina, tampoco es posible afirmar que el grupo prostético atribuido al proteido respiratorio sea el que con exclusion del resto de la molécula fije todo el oxigeno absorbido.

Segun investigaciones de Jaquet, publicadas ya en el año 1889, la proporcion de azufre de la hemoglobina varía con la procedencia, siendo tanto mayor respecto à la del hierro cuanto más grande sea la cantidad de oxigeno consumida por el animal.

Para dos átomos de hierro tiene cuatro de azufre la hemoglobina del caballo, seis la del perro y nueve la del pollo, de lo cual se infiere que para la absorcion del oxigeno debe ser más importante el papel del azufre que el del hierro contenidos en el albuminoide respiratorio.

Si segun lo comunmente aceptado, los proteidos desempeñan en los organismos sus especiales funciones mediante los grupos prostéticos, en vista de los datos antecedentes hay que admitir, ó que el de la oxihemoglobina no es la hematina porque no contiéne azufre, ó que el proteido en la totalidad de su molécula es el que efectua la absorcion del oxigeno.

El segundo punto de vista parece insostenible porque la globina disgregada de la hematina es semejante à las demás globulinas, y estas no muestran la propiedad de formar combinaciones con el oxigeno facilmente disociables, como tendria que suceder en el caso de que la proteina fuese colaboradora del grupo prostético en el acto respiratorio.

*
* *

La reaccion Michailow figura entre las coloridas que se citan

como características de las materias albuminoideas, la cual, como es sabido, la producen estas desarrollando color rojo de sangre arterial mediante la disolucion de sulfato ferroso, ácido sulfúrico y unas gotas de ácido nítrico ([1]). Las reacciones coloridas de los albuminoides no corresponden à la totalidad de la molécula, sinó à alguno de los grupos que la integran, y la Michailow fué atribuida à un grupo sulfociánico (CNS) productor del color rojo de sangre originado de la misma manera que el producido por el sulfocianato potásico al actuar sobre las sales férricas.

Comunmente se acepta que el sulfocianato potásico y las sales férricas producen por doble descomposicion sulfocianato férrico, pero en contra de esta creencia manifesté ([2]) que el compuesto rojo de sangre arterial, no debia ser el supuesto sulfocianato, sinó un producto de oxidacion à que daba origen el cloruro férrico, no por el radical metálico que lo forma, sinó por su caracter oxidante. En ausencia de todo compuesto de hierro, el ácido nítrico, el bioxido de hidrógeno, el agua de cloro y otros oxidantes producen con el sulfocianato la misma coloracion que el cloruro férrico, y cuando este es el que la origina, reductores como el ácido oxálico la hacen desaparecer sin que la sal férrica haya pasado à ferrosa, puesto que del líquido precipita *inmediatamente* azul de Prusia el ferrocianuro potásico.

Segun trabajos posteriores de Tarugi ([3]) el compuesto rojo formado sin la intervencion del hierro corresponde à la fórmula $H^3,C^3N^3S^3O^3$ que es la de un óxido del trimero del ácido sulfociánico (H,CNS), pero en presencia de aquel metal parte de su hidrógeno es sustituido, formandose entonces un compuesto mucho mas estable correspondiente á la formula $FeH,C^3N^3S^3O^3$, el cual es combinacion ferrosa, y no férrica, de un ácido perooxigenado. Este es capaz de ceder un átomo de oxigeno, solo por desecacion en el vacio en presencia del ácido sulfúrico transformándose de la manera siguiente:

$$FeH.C^3N^3S^3O^3 = FeH.C^3N^3S^3O^2 + O$$

([1]) Vease mi nota sobre este punto en los *Anales de la Sociedad española de Física y Química*. — Tom. III, pag. 20.
([2]) *Anales de la Sociedad española de Física y Química* — Tom. II, pag. 193.
([3]) *Gazzetta Chimica Italiana*. Noviembre 4, 1904, pagg. 326-348.

En la reaccion MICHAILOW, como en la de los sulfocianatos con las sales férricas, el color rojo de sangre arterial es debido al producto de la polimerizacion y oxidacion del ácido sulfociánico.

*

* *

Admitida una serie filogénica de la molécula albuminoidea, de la cual es consecuencia la evolucion morfológica y fisiológica de los elementos organizados, hay que suponerse un proceso químico, en el que, por efecto de las acciones del medio ambiente, fué agrandándose la molécula primordial mediante la adquisicion de nuevos elementos químicos y de nuevos grupos moleculares. A los términos iniciales de las protaminas estudiados por KOSSEL debieron añadirse posteriormente, no solo los grupos cíclicos de los albuminoides más complejos, sinó tambien el azufre de las proteinas y el fósforo de las nucleinas.

Por la correlacion que en todos los casos se observa entre los datos biológicos y los químicos debe suponerse que la hemoglobina es uno de los albuminoides más modernos, porque prescindiendo de algunos gusanos que lo contienen difundido en sus hemolinfas, dicho albuminoide respiratorio solo está contenido en los glóbulos rojos de los vertebrados, es decir, en los términos superiores de la escala animal; de lo que tambien se infiere que en la cronologia de los elementos biogenésicos el hierro debe figurar en el último puesto; en el del mas moderno. Muéstrase conforme esta conclusion con la particularidad de ser el hierro entre los elementos biogenésicos el de peso atómico mas elevado revelando que el alcance de la *ley periódica* llega hasta la evolucion de la materia viva, y concuerda tambien aquella con la particularidad de ser el elemento mas dificilmente asimilable, dificultad revelada por la Naturaleza, y por ella prevista en el hecho de poner exceso de hierro en el organismo del recien nacido, y en cambio, casi excluirlo de la leche, única insuficiencia por la cual no le corresponde en absoluto el titulo de alimento completo.

*

* *

Poniendo en cotejo todos los datos que aportan las precedentes observaciones, ya no resulta violento abandonar la idea de la constitucion de la hemoglobina por la asociacion de la hematina, y en cambio recordando la proporcionalidad del azufre con la importancia de los cambios respiratorios, parece lógico suponer que en el curso de la filogenia química, mediante reacciones análogas à la MICHAILOW; y en términos mas sencillos, por reaccion análoga à la de los sulfocianatos con el cloruro férrico, albuminas y globulinas convenientemente oxidadas produjeron el cromoproteido concurriendo el hierro à dar estabilidad al grupo oxisulfociánico.

Las oxidasas, cuyo papel es fundamental en todo género de acciones fisiológicas, debieron ser allá en el origen, y deben ser en la actualidad las transformadoras de las proteinas en hemoglobina porque el ozono administrado en la dosis de 11 à 12 centesimas de miligramo por litro de aire, segun observaciones de Labbè y Oudin [1] en el breve tiempo de 10 à 15 minutos aumenta en 1 por 100 la proporcion de la hemoglobina de la sangre, y este rápido incremento está mas en armonia con las condiciones en que se produce el compuesto rojo de la reaccion MICHAILOW que con las en que habria de formarse un cuerpo tan complejo como la hematina, cuya estructura, aunque se cree ya esclarecida refiriéndola à la del butilpirrol como núcleo de la molécula, todavia está ignorada en un punto tan importante cual es el modo de engaste del átomo de hierro.

*

* *

Ia en el año 1879 discurriendo Pflüger acerca del origen de la materia viva redujo este problema al del origen de la albúmina,

---

[1] Compt. Rend. Ac. Sc.; tom. CXIII, pag. 141.

y en sus disquisiciones llegó à la conclusion de que el ácido ciánico (H.CNO) debió ser allá en el curso de los procesos geológicos el núcleo primordial de la materia albuminoidea creciendo la molécula de esta hasta alcanzar la magnitud con que aparece en la obra arquitectónica de la organizacion por la capacidad del núcleo para polimerizarse, capacidad que se patentiza en los laboratorios al producirse las ciamélidas $(H.CNO)^n$.

La célula es la unidad de la organizacion, y el ascenso de todos los grados de la escala de la vida, hasta llegar à los tèrminos superiores, se efectúa, no mediante elementos absolutamente nuevos, sinó formando asociaciones de la misma unidad que al asociarse se diferencia; de igual manera las moléculas albuminoideas adquieren su tamaño gigantesco por la polimerizacion de su núcleo primordial, y al producirse los grados supremos de la diferenciacion química que constituyen los grupos prostéticos de los proteidos no varia el procedimiento como se ve en las bases púricas y pirimídicas formadoras de los ácidos nucleínicos, las cuales en último analisis resultan derivadas de grupos ciánicos.

Considerando el grupo prostético de la oxihemoglobina como resultado de la polimerizacion del ácido oxisulfociánico, entra este caso particular en el general de complicarse las formaciones elaboradas en el proceso biológico por repeticion con diferenciacion ulterior de los factores primordiales.

Desde los varios puntos de vista que se ha examinado la hemoglobina creo que, no obstante la sintesis efectuada por Bertin-Sans y Moitessier, es mas razonable que lo hoy generalmente aceptado, admitir que en la reaccion Michailow se produce artificialmente una metamorfosis química análoga à la que en el desarrollo de la serie filogénica formó naturalmente la hemoglobina sobre la base de las albúminas y las globulinas no coloridas que constituyen en los organismos inferiores las *acroglobinas* de funcion respiratoria.

Segun Pflüger, con la formacion del ácido ciánico se inició la de las materias albuminoideas, y estas mediante la polimerizacion de aquel y el engarce de cadenas amino-ácidas fueron agrandando su molécula hasta constituir las proteinas formadoras de los citoplasmas. Nuevas moléculas ciánicas asociadas al ácido fosfórico forman el grupo prostético de las nucleinas que en la diferenciacion de la materia viva constituyen la parte principal

del núcleo celular. Finalmente, moléculas oxisulfociánicas asociadas al hierro forman el grupo prostético del cromoproteido respiratorio.

Aceptadas las ideas precedentes respecto à la constitucion de la hemoglobina, muéstrase en todos los casos el proceso químico de la materia formadora de la organizacion como resultado de la diferenciacion del mismo núcleo fundamental.

A OBRA SCIENTIFICA E A VIDA DO CHIMICO PORTUGUEZ ROBERTO DUARTE SILVA

POR

A. J. Ferreira da Silva

(Continuação)

IV

De 1875 a 1881 occupou-se **Roberto D. Silva** de investigações interessantes ácerca da acção do gaz iodhydrico sobre os diversos compostos organicos; e, com os dados colhidos, poude resolver questões ainda por liquidar, particularmente a da constituição do ether glycerico e do chloroiodeto de propyleno.

Os effeitos do acido iodhydrico sobre as materias organicas, abstrahindo d'aquelles em que ha fixação dos elementos do acido, reduziam-se até elle ou a uma subtracção de oxygenio ou a uma substituição do iodo ou outro elemento halogenico pelo hydrogenio, isto é, a uma hydrogenação directa. Era esta a summula dos resultados de longas e sabias investigações effectuadas por V. de Luynes, Lautmann, e principalmente pelo Sr. Berthelot. Mas todos estes chimicos empregavam o acido iodhydrico ou no estado nascente, ou em soluto concentrado, mas a temperaturas mais ou menos elevadas.

O nosso eminente compatriota ensaiou, pelo contrario, a acção do gaz iodhydrico secco sobre as materias organicas mantidas a uma temperatura comprehendida entre 0° e 4°, ou mesmo inferior.

Foi levado a estas pesquizas durante o estudo d'alguns etheres, no intento de os separar dos carbonetos ethylenicos C^nH^{2n}, que por vezes os acompanhavam. A separação de taes corpos, ambos muito volateis, não se podia realisar por distillação fraccionada; mas realisar-se-ia talvez, pensou Roberto Silva, pelo acido iodhydrico a *baixa temperatura*, condição em que se fixaria certamente o carboneto C^nH^{2n} por addição directa, sem actuar sobre o ether.

Mas, realisada a experiencia, desde logo reconheceu que o gaz iodhydrico era absorvido em proporção muito superior á que exigia o hydrocarboneto; e, distillando o producto, notou Roberto Silva que o ether fôra quasi completamente transformado.

Foi este incidente que o levou a estudar, de um modo particular, a *acção do gaz iodhydrico*, nas condições especiaes ainda não ensaiadas, *sobre os etheres* (1).

Notemos, antes de proseguir, que na acção do acido iodhydrico sobre os alcooes saturados, o oxygenio oxhydrylico se transforma em agua, formando-se um iodeto alcoolico

$$\underbrace{\begin{array}{c} C^nH^{2n+1} \\ | \\ O \\ | \\ H \end{array}}_{\substack{\text{Alcool}\\ \text{monobasico}\\ \text{saturado}}} + \underbrace{\begin{array}{c} I \\ | \\ | \\ | \\ H \end{array}}_{\substack{\text{Ac.}\\ \text{iodhy-}\\ \text{drico}}} = \underbrace{C^nH^{2n+1}I}_{\substack{\text{Iodeto}\\ \text{alcoolico}}} + \underbrace{H^2O}_{\text{Agua}} \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

No caso dos etheres propriamente ditos e mixtos, em que não havia oxygenio oxhydrylico, pensava-se, sem demonstração, que se formavam dois iodetos alcoolicos, sendo o oxygenio que ligava os dois radicaes do ether transformado em agua pelo hydrogenio

---

(1) A exposição dos resultados d'estas experiencias encontra-se na memoria intitulada: «*De l'action de l'acide iodhydrique à basses températures sur les éthers proprement dits et les éthers mixtes*». *Annales de chimie et de physique*, 5e série, t. VII, 1876, pagg. 425-432. Foi com o mesmo titulo publicado um resumo nos *Comptes rendus*, t. LXXXI, pagg 323-325.

de acido iodhydrico:

$$\left.\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} C^4H^5 \\ | \\ O \\ | \\ C^3H^7 \end{matrix}}_{\substack{\text{Ether} \\ \text{ethylpro-} \\ \text{pylico}}} & + & \underbrace{\begin{matrix} I \\ | \\ HH \\ | \\ I \end{matrix}}_{\substack{\text{2 mol.} \\ \text{de ac.} \\ \text{iodhydrico}}} \end{matrix}\right\} = \underbrace{C^2H^5.I}_{\substack{\text{Iodeto} \\ \text{de ethylo}}} + \underbrace{C^7H^3.I}_{\substack{\text{Iodeto} \\ \text{de propylo}}} + H^2O.$$

Mas não é assim que as coisas se passam. De facto, fazendo actuar o acido iodhydrico sobre o ether ethylamylico, notou **Roberto Duarte Silva** que elle se transformava integralmente em iodeto de methylo e em alcool amylico, segundo a equação:

$$\underbrace{\begin{matrix} CH^3 \\ | \\ O \\ | \\ C5H^{11} \end{matrix}}_{\substack{\text{Oxydo de} \\ \text{methylo} \\ \text{e amylo}}} + \underbrace{\begin{matrix} I \\ | \\ \\ | \\ H \end{matrix}}_{\substack{\text{Ac.} \\ \text{iodhy-} \\ \text{drico}}} = \underbrace{CH^3.I}_{\substack{\text{Iodeto de} \\ \text{methylo}}} + \underbrace{C^5H^{11}.OH}_{\text{Alcool amylico}} \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

no fundo analoga á reacção representada pela equação (1) da pagina anterior.

Roberto Silva pensou então que a reacção seria geral; que se devia dar quer com os etheres oxydos mixtos, quer com os propriamente ditos; e que, portanto, na acção do acido iodhydrico sobre os etheres, só uma parte d'estes se transformava num iodeto, e que esta transformação só seria completa, no caso em que o alcool formado na primeira phase fosse transformado em iodeto, por virtude de uma reacção secundaria, determinada por influencia do acido iodhydrico.

Ensaiando primeiro a acção do acido iodhydrico sobre os alcooes monatomicos anhydros, verificou que o alcool methylico $CH^3.OH$ era completamente transformado em iodeto; mas que os alcooes propylico e isopropylico $C^3H^7.OH$, o isobutylico $C^4H^9.OH$ e o amylico $C^5H^{11}.OH$ só fornecem quantidades muito pequenas de iodetos.

Dos etheres oxydos propriamente ditos ensaiou: o oxydo de methylo $CH^3.O.CH^3$, o de ethylo $C^2H^5.O.C^2H^5$, os de propylo e isopropylo $C^3H^7.O.C^3H^7$, o de isobutylo $C^4H^9.O.C^4H^9$ e o de amylo $C^5H^{11}.O.C^5H^{11}$; e, dos etheres mixtos, o oxydo de ethylo e amylo $C^2H^5.O.C^5H^{11}$, o de isoproepylo e amylo C^3H^7(iso)$.O.C^5H^{11}$; e por ultimo estudou especialmente a reacção sobre os etheres mixtos, taes como o oxydo de propylo e de methylo $C^3H^7.O.CH^3$, o de butylo e de methylo $C^4H^9.O.CH^3$, o de amylo e methylo $C^5H^{11}.O.CH^3$ e o de ethylo e methylo $C^2H^5.O\ CH^3$ (1) em que um dos radicaes é o methylo.

Do conjuncto das experiencias realisadas, deduziu as tres proposições seguintes:

1.ª Quando se faz actuar o gaz iodhydrico sobre um ether propriamente dito, arrefecido entre 0° e +4°, dá-se entre os dois corpos uma dupla decomposição, da qual resulta a formação do alcool e a do iodeto alcoolico correspondentes:

$$\underbrace{C^nH^{2n+1}.O.C^nH^{2n+1}}_{\text{Ether oxydo}} + \underbrace{HI}_{\substack{\text{Acido}\\ \text{iodhydrico}}} = \underbrace{C^nH^{2n+1}.OH}_{\text{Alcool}} + \underbrace{C^nH^{2n+1}.I.}_{\substack{\text{Iodeto}\\ \text{alcoolico}}}$$

2.ª Quando se faz reagir o gaz iodhydrico sobre um ether mixto, arrefecido entre 0° e 4°, dá-se ainda uma dupla decomposição, substituindo-se mutuamente o hydrogenio do acido iodhydrico, e o radical menos rico em carbono, de sorte que se forma um iodeto do radical hydrocarbonado menos rico em carbono, e um alcool correspondente ao radical mais carbonado:

$$\underbrace{\begin{array}{c} C^nH^{2n+1} \\ | \\ O \\ | \\ C^{n'}H^{2n'+1} \end{array}}_{\substack{\text{Ether oxydo}\\ \text{mixto}}} + \underbrace{\begin{array}{c} H \\ | \\ | \\ | \\ I \end{array}}_{\substack{\text{Acido}\\ \text{iodhydrico}}} = \underbrace{C^nH^{2n+1}.OH}_{\text{Alcool}} + \underbrace{C^{n'}H^{2n'+1}.I.}_{\text{Ether iodhydrico}}$$

sendo n maior que n'.

(1) *Bulletin de la Société chimique de Paris*, 2ª série, t. XXV, pag. 529.

3.° Todos os etheres oxydos mixtos em que um dos radicaes é o methylo, arrefecidos entre 0° e 4°, são transformados pelo gaz iodhydrico em iodeto de methylo e no alcool correspondente ao outro radical:

$$\begin{array}{l} C^nH^{2n+1} \\ | \\ O \\ | \\ CH^3 \end{array} + \begin{array}{c} H \\ | \\ | \\ | \\ I \end{array} = C^nH^{2n+1}.OH + CH^3I.$$

Esta proposição é um caso particular da 2.ª, mas merece ser referida especialmente, por virtude da nitidez notavel com que se realisa.

Dá-nos, além d'isso, um *meio muito facil e commodo de passar de um hydrocarboneto saturado para o alcool correspondente*. É, com effeito, muito facil passar de taes hydrocarbonetos para os seus derivados monochlorados; e estes, por meio de um soluto de potassa no alcool methylico, transformam-se muito facilmente no ether mixto $C^nH^{2n+1}.O.CH^3$; uma vez obtido este ether, a acção do gaz iodhydrico transforma-o no alcool que se queria obter:

$$\underbrace{C^nH^{2n+2}}_{\text{Hydrocarboneto saturado}} \rightarrow \underbrace{C^nH^{2n+1}.Cl}_{\text{Ether chlorhydrico}} \rightarrow \underbrace{C^nH^{2n+1}.O.CH^3}_{\text{Ether oxydo methylico}} \rightarrow \underbrace{C^nH^{2n+1}.OH}_{\text{Alcool saturado}}.$$

As leis precedentemente expostas referem-se á acção do gaz iodhydrico sobre os etheres oxydos dos alcooes monatomicos saturados. Applicar-se-hão ellas tambem aos etheres oxydos dos alcooes não saturados? Foi para resolver este ponto que **Roberto D. Silva** estudou os productos da reacção do gaz iodhydrico sobre o ether allylmethylico $C^3H^5.O.CH^3$, arrefecido entre 0° e 4°; a judiciosa interpretação que o auctor deu aos resultados da experiencia mostra ainda que a lei se applica a estes etheres.

Os productos d'esta reacção são: iodeto de methylo CH^3I, iodeto de isopropylo C^3H^7I e iodo livre; o primeiro está directamente de accordo com a lei enunciada; o segundo, o iodeto de isopropylo, resulta de duas acções secundarias, a saber: 1.° a acção do acido iodhydrico sobre o alcool allylico, que dá o iodeto de

allylo, producto directo da reacção; 2.° a transformação do iodeto de allylo, nas mesmas condições de temperatura, em iodeto de isopropylo, sob a acção do gaz iodhydrico:

a)

$$\underbrace{\begin{array}{c} CH^3 \\ | \\ O \\ | \\ C^3H^5 \end{array}}_{\substack{\text{Oxydo} \\ \text{methyl-} \\ \text{allylico}}} + \underbrace{\begin{array}{c} I \\ | \\ | \\ | \\ H \end{array}}_{\substack{\text{Acido} \\ \text{iodhy-} \\ \text{drico}}} = \underbrace{C^3H^5.OH}_{\text{Alcool allylico}} + \underbrace{CH^3.I}_{\substack{\text{Iodeto de} \\ \text{methylo}}};$$

b)

$$\underbrace{\begin{array}{c} C^3H^5 \\ | \\ OH \end{array}}_{\substack{\text{Alcool} \\ \text{allylico}}} + \begin{array}{c} I \\ | \\ H \end{array} = \underbrace{C^3H^5I}_{\substack{\text{Iodeto de} \\ \text{allylo}}} + H^2O;$$

c)

$$\underbrace{C^3H^5.I}_{\substack{\text{Iodeto} \\ \text{de allylo}}} + 2HI = \underbrace{C^3H^7.I}_{\substack{\text{Iodeto} \\ \text{de isopropylo}}} + I^2.$$

Esta interpretação foi justificada pelo estudo experimental cuidadoso da acção do acido iodhydrico sobre o alcool allylico e sobre o iodeto de allylo, á temperatura de 0° a 4° ([1]).

Vejamos agora como estas pesquizas poderam servir para illucidar a constituição de alguns corpos organicos.

O *ether glycerico* é um corpo de formula $C^6H^{10}O^3$, correspondente á reunião de 2 moleculas de glycerina com eliminação de 3 moleculas de agua:

$$\underbrace{2C^3H^8O^3}_{\substack{\text{2 moleculas} \\ \text{de glycerina}}} - \underbrace{3H^2O}_{\text{Agua}} = \underbrace{C^6H^{10}O^3}_{\substack{\text{Ether} \\ \text{glycerico}}}.$$

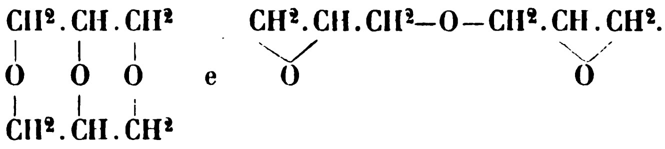
Gegerfelt poude separá-lo por distillação do residuo negro e abundante que se obtem quando se prepara o alcool allylico pelo aquecimento da glycerina com o acido oxalico; Linnemann

([1]) *Bulletin de la Société chimique de Paris*, 1875, t. XXIV, pag. 482.

e Zotta encontravam-no, quasi ao mesmo tempo, distillando a glycerina com o chloreto de calcio (¹). O mesmo corpo foi obtido por Tollens e Loe na distillação da glycerina com 2 % de chloreto de ammonio, e por Berthelot e de Luca na acção da potassa sobre a iodhydrina. É um corpo liquido, um pouco espesso, incolor e quasi inodoro, soluvel na agua e insoluvel no alcool e no ether, de densidade 1,1453 a 0°, e fervendo a 170°; reduz o soluto ammoniacal do acetato de prata e os dos chloretos de ouro e de platina; precipita em vermelho o soluto de Fehling, e transforma os solutos dos chloretos ferrico e mercurico em saes no minimo.

Roberto Silva não só completou o estudo das propriedades do novo corpo, como resolveu o problema da sua constituição.

As duas formulas racionaes que se lhe podiam attribuir, e que Gegerfelt reproduz na sua memoria, são:



Ether oxydo de glycerina — Ether oxydo do glycido

A primeira representa, com as tres ligações exteriores pelo oxygenio, um verdadeiro ether oxydo de glycerina — um oxydo do radical triatomico, o glycerylo C^3H^5; a segunda, com as duas ligações interiores pelo oxygenio, e uma só externa, representa o ether oxydo do *glycido,* esse corpo interessante, anhydrido interno e alcool, que Hanriot preparou na acção do oxydo de bario sobre a monochlorhydrina de glycerina (²).

Gegerfelt suppunha esta segunda formula mais provavel; o nosso eminente patricio demonstrou, pelo contrario, que era a primeira que se devia adoptar, e é essa, de facto, que está consignada hoje nos modernos tratados (³).

(¹) H. v. Gegerfelt, *Uber den sogenannten Glycerinäther,* in *Berichte der deutsch. chem. Gesellschaft,* t. IV, pagg. 919-921.
(²) *Ann. de chimie et de physique,* 5ᵉ série, t. XVII, pag. 112.
(³) Entre outros, em Beilstein, *Handbuch der org. Chemie,* 3.° Aufl., Hambourg e Leipzig, 1893, t. I, pag. 314; Berthelot et Jungfleisch, *Chimie organique,* t. I, 4ᵉ édit., Paris, 1898, pag. 374.

Com effeito, o ether glycerico tratado a 0° pelo gaz iodhydrico, comporta-se como um verdadeiro ether oxydo, dando glycerina e iodeto d'allylo biiodado:

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} CH^2.&CH.&CH^2 \\ | & | & | \\ O & O & O \\ | & | & | \\ CH^2.&CH.&CH^2 \end{array}}_{\text{Ether glycerico}} + 3\underbrace{\left\{\begin{array}{c} H \\ | \\ I \end{array}\right\}}_{\text{Acido iodhydrico}} = \underbrace{CH^2OH.CHOH.CH^2OH}_{\text{Glycerina}} + \underbrace{CH^2I.CHI.CH^2I}_{\text{Iodeto d'allylo biiodado}}.$$

Por uma acção secundaria, determinada pelo acido iodhydrico, este ultimo é depois transformado em iodeto de isopropylo.

Como complemento d'este estudo, estudou ROBERTO D. SILVA a acção do gaz acido iodhydrico sobre a cloroiodhydrina symetrica, que REBOUL obtivera combinando a epichlorhydrina, derivada da glycerina, com o acido iodhydrico:

$$\underbrace{CH^2OH.CHOH.CH^2OH}_{\text{Glycerina}} \rightarrow \underbrace{\begin{array}{c} CH^2.CH.CH^2Cl \\ \diagdown\diagup \\ O \end{array}}_{\text{Epichlorhydrina}} \rightarrow \underbrace{CH^2I.CHOH.CH^2Cl}_{\text{Chloroiodhydrina symetrica}}$$

e conseguiu transformá-la em chloreto de propylo normal, correspondente ao alcool propylico C^3H^8O [1]:

$$\underbrace{\begin{array}{c} CH^2I \\ | \\ CHOH \\ | \\ CH^2Cl \end{array}}_{\text{Chloro-iohydrina sym.}} + \underbrace{3HI}_{\text{Acido iodhydrico}} = \underbrace{\begin{array}{c} CH^3 \\ | \\ CH^2 \\ | \\ CH^2Cl \end{array}}_{\text{Chloreto de propylo}} + H^2O + 2I^2.$$

Resultado este muito importante, porque representa a transfor-

[1] Estes trabalhos constam da nota intitulada: *Sur la constitution de l'éther glycérique et sur la transformation de l'épichlorhydrine en alcool propylique normal*, in *Comptes rendus*, t. XCIII, 1881, pagg. 418-421.

mação de um alcool triatomico saturado, a glycerina, no alcool monatomico saturado tendo o mesmo numero de atomos de carbono, o alcool propylico: — problema este que tinha sido atacado por diversos chimicos sem successo:

$$\underbrace{C^3H^8O^3}_{\text{Glycerina}} - O^2 = \underbrace{C^3H^8O}_{\text{Alcool propylico}}.$$

N'esta reacção consignou tambem um facto curioso: a formação de uma pequena proporção de iodeto de propylo normal, mas só quando se não affastava o chloreto de propylo, á medida que elle se formava.

De sorte que se devia attribuir a geração de iodeto á dupla troca entre o chloreto de propylo e o acido iodhydrico:

$$\underbrace{C^3H^7Cl}_{\text{Chloreto de propylo}} + \underbrace{HI}_{\text{Acido iodhydrico}} = \underbrace{C^3H^7I}_{\text{Iodeto de propylo}} + HCl.$$

Este facto, apurado com muita sagacidade, serviu-lhe de base para poder determinar a constituição do *chloroiodeto de propyleno*, que estava incerta, depois dos trabalhos de Sorokin, chimico russo, publicados em 1870 [1].

Observou, de facto, Sorokin que aquecendo o chloroiodeto de ethyleno ou chloroiodopropano, que ferve a 148° a 149°, com um soluto de acido iodhydrico se obtinha como unico producto da reacção o iodeto de isopropylo $CH^3.CHI.CH^3$.

Ficava para decidir, accrescentava o chimico russo, se o chloroiodeto de propyleno devia ser:

$$CH^3.CHCl.CH^2I,$$

que na linguagem de hoje se chama:

2-*Chloro*-1-*iodopropano*

[1] *Berichte der deuts. chem. Gesellschaft*, t. III, 1870, pag. 626.

ou antes:

$$CH^3.CHI.CH^2Cl,$$

que actualmente se denomina:

2-Iodo-1-chloropropano.

Propoz **Roberto Silva** a primeira formula, que é hoje a admittida [1]; e deu a explicação da reacção, que se faz em duas phases: na primeira o acido iodhydrico muda o chloroiodeto de propyleno em chloreto de isopropylo; na segunda, o chloreto de isopropylo é transformado pelo gaz iodhydrico em iodeto, reacção que deve dar-se, como se dá a passagem do chloreto de propylo para o iodeto, já indicada:

$$\underbrace{\begin{array}{l}CH^3\\|\\CHCl\\|\\CH^2I\end{array}}_{\substack{\text{Chloro-}\\\text{ideto de}\\\text{propyleno}}} \rightarrow \underbrace{\begin{array}{l}CH^3\\|\\CHCl\\|\\CH^3\end{array}}_{\substack{\text{Chloreto}\\\text{de isopropylo}\\\text{(2-chloro-}\\\text{propano)}}} \rightarrow \underbrace{\begin{array}{l}CH^3\\|\\CHI\\|\\CH^3.\end{array}}_{\substack{\text{Iodeto}\\\text{de}\\\text{isopropylo}\\\text{(2-iodo-}\\\text{propano)}}}$$

Mas, para que a interpretação fosse definitivamente acceite, era necessario demonstrar que o chloreto de isopropylo era o termo intermedio da reacção. Para isso tomou R. **Silva** um soluto concentrado de acido iodhydrico, no qual determinou a proporção de acido iodhydrico; aqueceu a banho-maria, em matrazes fechados á lampada, moleculas eguaes de chloroideto de propyleno e acido iodhydrico, e obteve n'estas condições uma quantidade notavel de chloreto de isopropylo $CH^3.CHCl.CH^3$, de ponto de ebulição de cerca de 36°. E assim concluiu que no chloroiodeto de propyleno o chloro está reunido ao atomo do carbono central.

Para completar a demonstração, transformou directamente o

---

(1) Beilstein, *ob cit.*, pag. 192.

chloreto de isopropylo em iodeto do mesmo radical pela acção do acido iodhydrico; bastou-lhe para isso aquecer a banho-maria, em matrazes fechados, moleculas eguaes dos dois corpos; de 40 gr. de chloreto de isopropylo que empregou apenas 3 ou 4 se não transformaram:

$$\underbrace{CH^3.CHCl.CH^3}_{\text{Chloreto de isopropylo}} + HI = \underbrace{CH^3.CHI.CH^3}_{\text{Iodeto de isopropylo}} + HCl.$$

Se agora se realisar a experiencia fazendo reagir o acido iodhydrico em excesso, sob a forma de corrente, sobre o chloroiodeto de propyleno aquecido a banho de agua a 100°, e se recolherem em agua esfriada os productos da reacção, não se obtem a menor parcella de chloreto de isopropylo, mas sim iodeto do mesmo radical.

Não pode ser mais completa a demonstração (1).

No decurso d'estas experiencias, demonstrou que o producto da acção do chloreto d'iodo sobre o propyleno não é uma mistura de dois chloroidetos, mas um só chloroiodeto, que corresponde á formula $CH^3.CHCl.CH^2I$ (2).

(Continúa).

(1) As notas em que este assumpto está tratado por R. D. Silva são: *Action de l'acide iodhydrique sur le chloroiodure de propylène et sur le chloroiodure d'isopropyle*, in *Comptes rendus*, t. XCIII, pag. 739.
(2) *Comptes rendus*, t. XCIII, 1881, pagg. 739–741.

O CAPITALISMO E AS SUAS ORIGENS EM PORTUGAL

POR

BENTO CARQUEJA

(Continuação)

III

As origens do capitalismo

Póde affirmar-se que a era capitalista principia, verdadeiramente, com o seculo XVI (1). É então que o regimen capitalista se manifesta, com este triplice caracter: 1.º tendencia para a divisão progressivamente mais perfeita do trabalho, e, como consequencia necessaria, para o emprego das machinas; 2.º concentração crescente dos capitaes e dos instrumentos de trabalho nas mãos dos *chefes industriaes;* 3.º creação de duas classes antagonicas, animadas de paixões hostis e cujos interesses de cada vez se revelam em maior desacordo.

É certo que a revolução individualista e a revolução industrial dos fins do seculo XVIII precipitaram o apparecimento do regimen capitalista; mas não foram ellas que lhe deram origem.

Na Revolução Francêsa fez-se ouvir o grito das reindivicações operarias; mas, antes d'isso, antes da lei francêsa de 1791, que

---

(1) HENRI HAUSER, *Revue d'Economie Politique*, 16.º anno, n.º 4.

fez surgir acceso conflicto entre o capital e o trabalho, existia já o regimen capitalista.

Vem, effectivamente, de mais longe essa origem e tem de ser necessariamente procurada no tempo em que numerosas industrias, se bem que apparentemente modeladas ainda no velho regimen, começam a experimentar a influencia da nova economia social, e a constituir-se em pequenas oligarchias capitalistas, bastante restrictas, quasi hereditarias.

Volvamos os olhos para a Renascença e ahi encontraremos as origens do capitalismo moderno ; d'alli o acompanharemos, atravez dos tempos, n'uma evolução constante, como o patriarchalismo das sociedades primitivas, como o feudalismo da idade media.

Foi, sem duvida, no seio do regimen corporativo que se esboçaram as origens do capitalismo moderno, como, seguramente, sobre a actual sociedade capitalista se está esboçando o edificio de uma sociedade nova, a sociedade futura. A evolução domina profundamente os phenomenos sociaes.

Não praticariamos erro se fossemos aos seculos XIII e XIV investigar as diversas manifestações do credito, que tornaram possivel a concentração do capital. Effectivamente, após as cruzadas, desenvolve-se o commercio do Levante, animam-se as feiras em diversos pontos da Europa, passando-se do periodo da economia natural para o da economia-dinheiro. Surge, dest'arte, o predominio das classes, que manipulam esse dinheiro, especialmente os judeus e a Ordem dos Templarios, que, no dizer de Léopold Delisle (1), constituiu o primeiro grande banco internacional de depositos.

As grandes feiras do seculo XIII offerecem um singular e interessantissimo espectaculo a quem as contemple, tanto sob o ponto de vista ethnographico, como sob o economico. Misturam-se n'ellas os mais diversos povos, trocam-se as mercadorias de affastadas regiões, dá-se uma nova e mais larga feição aos negocios.

A credito, n'uma forma embryonaria, começa a produzir pro-

---

(1) L. Delisle, *Mémoire sur les opérations financières des Templiers* : 1889.

digios: — já se não reclamam para penhor apenas especies monetarias; bastam objectos materiaes, que possam dar algum proveito ao possuidor d'elles. Assim se explica como o contracto de mutuo mais antigo seja o de commandita (1).

A quantia emprestada é convertida em valor equivalente de fazendas, couros, etc., que o capitão do navio ou o carreiro conduzem a Ceuta e a outros pontos. Era uma commandita a largo risco, *in fortuna Dei*. Se as mercadorias chegassem a porto e salvamento, seriam vendidas em proveito da sociedade e o transportador teria direito, por exemplo, a 20 por cento de lucro. Algumas vezes, a commandita complicava-se com operações de cambio de moedas, abrangendo pagamentos a realisar, em pontos por vezes bem distantes, á data das feiras ou em prasos prefixados, tanto ao proprio prestamista como ao seu representante. Assim, apparece no anno de 1200 a primeira letra de cambio.

Nas grandes feiras, que centralizavam o commercio das especiarias do Levante e dos pannos do Occidente, eram conhecidos os pagamentos por compensação. Pouco era o dinheiro, que andava de mão em mão: trocavam-se, especialmente, penhores, de forma que, no fim da feira, as lojas dos cambistas constituiam verdadeiramente aquillo que hoje se chama um *clearing-house*.

Na industria apparece o uso das vendas a praso. A principio, a lei prohibia-as; mas os curtidores de Troyes acharam meio de illudir a lei e obtiveram do rei, em 1339, o direito de comprar e vender couros a praso e de fazer até dois reportes successivos (2).

Todavia, na opinião de KONRAD HAEBLER, só no principio do seculo XII appareceram os negocios propriamente de letras, cambio e dinheiro, com certo desenvolvimento (3).

Todas as grandes casas de commercio tratavam de negocios de letras e transferencias de dinheiro entre os diversos paises; mas estas operações eram propriamente um accessorio do prin-

---

(1) FAGNIEZ, *Doc. rel. à l'hist. du commerce et de l'industrie.*
(2) FAGNIEZ, *Ob. cit.*
(3) HAEBLER, *Die Geschichte der Fugger'schen Handlung in Spanien* pag. 5.

cipal ramo de negocio, o qual consistia no trafico de mercadorias. Os negocios bancarios constituiam apenas um appendice dos negocios meramente commerciaes.

Os emprestimos de dinheiro eram feitos geralmente consignando ao banqueiro quaesquer rendimentos, até ao reembolso das quantias mutuadas. Muitas vezes, esses rendimentos referiam-se a propriedades, minas, etc.

Os Fuggers, que davam leis em materia de finança, preferiam esta forma de realizar negocios financeiros.

Como os negocios bancarios feitos com os governos excediam, em geral, os recursos de que um só capitalista podia dispôr, formaram se para cada caso especial sociedades com duração limitada, com responsabilidade tambem limitada para com os socios, e liquidação logo depois de concluido o negocio (1).

Os Fuggers tiveram importantes negocios em Espanha e Portugal, reservando-nos para fallar d'estes mais adiante.

O governo espanhol convidou, por vezes, os negociantes nacionaes e extrangeiros (estes desde 1522) a tomarem participação nas frotas commerciaes, que enviava ás Molucas, garantindo não só uma percentagem no lucro total, proporcionalmente á entrada, como tambem o reembolso do capital, com 20 por cento de juro, no caso de não ir por diante a expedição. Quem entrasse com 20:000 ducados tinha o direito de mandar um com missario, que acampanharia a frota. Em algumas das expedições, os estrangeiros, sobretudo os allemães, contribuiram com quasi tres quartas partes do capital (2).

Tambem em Espanha os Fuggers tiveram de fornecer frequentes vezes os materiaes (madeira, cobre, canhamo, etc), para o armamento das frotas da India.

Os negocios financeiros feitos pelos Fuggers, em Hespanha, eram de duas cathegorias:

1.ª *Asientos*, ou negocios em que para pagamento do debito contrahido eram consignados ao crédor rendimentos cobrados em prasos fixos. Essas consignações consistiam, geralmente, em impostos ou rendas de propriedades. Os credores rece-

---

(1) K. Haebler, *Ob. cit.* pag. 7.
(2) K. Haebler, *Ob. cit.* pag. 49.

biam esses pagamentos das mãos dos contratadores dos impostos, que, por seu turno, os cobravam; mas casos havia em que os proprios Fuggers figuravam como cobradores de tributos.

2.ª *Credito e socorros*, ou negocios em que eram feitos emprestimos com garantias e cuja importancia era, em geral, pequena. Entravam n'esta cathegoria os pagamentos, que os Fuggers tinham de fazer no estrangeiro, por ordem do governo espanhol, aos embaixadores de Espanha, etc. (1)

Os Fuggers exerceram, incontestavelmente, influencia benefica no desenvolvimento da agricultura e da exploração mineira em Espanha; prestavam-se a collocar vantajosamente n'aquelle país capitaes, que lhes eram confiados para esse fim (2).

O estabelecimento espanhol dos Fuggers só deixou de existir no meiado do seculo XVII.

Todos estes factos encaminham para a concentração do capital industrial; foi, na verdade, o commercio que operou a concentração dos primeiros capitaes; é a industria que passa a utilisa-los.

Ao lado do tecelão, por exemplo, que vende o panno tecido por elle proprio e pelos seus officiaes e aprendizes, apparece o mercador burguez, mais ou menos abastado, que não tece, mas que emprega, por sua conta, uma porção de tecelões, afinadores, tintureiros, etc.; limita-se o seu papel a fornecer a lã aos mestres tecelões das dezasete cidades productoras de pannos e a vender esses pannos nas feiras ou nas Escalas do Levante.

Fagniez faz notar que esse papel representa o primeiro signal da «distincção entre commerciantes capitalistas e industriaes que executam as encommendas d'elles» (3). Essa organisação capitalista encontra-se, por exemplo, em França, na Allemanha e na Italia.

Para se ter largo conhecimento do commercio do Levante é preciso lêr a obra especial de HEYD «GESCHICHTE DES LEVANTEHANDELS IM MITELLALTER» (Stuttgart, 1879, I vol.)

(1) K. HAEBLER, *Ob. cit.* pag. 118.
(2) K. HAEBLER, *Ob. cit.* pag. 233 e 235.
(3) FAGNIEZ, *Ob. cit.* II.

Abrange a historia d'esse commercio tres periodos, segundo Heyd: 1.° *Os inicios* (da invasão dos barbaros ás cruzadas; 2.° *A florescencia*) fundação das colonias commerciaes do Oriente, Syria e Asia Menor, exploração da Asia Central, desde o fim do seculo XIII até fins do seculo XIV; 3.° *Decadencia* (esgotamento das nações maritimas do Mediterraneo, ruina dos caminhos para a Asia e atravez da Asia, descoberta de um novo caminho pelos portugueses).

O primeiro periodo refere-se, especialmente, á epocha do imperador Justiniano e tempo dos seus successores; ao apparecimento de Mahomet, até ao começo das cruzadas. O segundo periodo menciona os Estados fundados pelos cruzados na Syria, abrangendo as colonias commerciaes existentes e os fócos do commercio de Levante n'esses Estados, Bysancio sob, o dominio de Comnenos e Angeli, o imperio latino, a ilha de Chypre, a Armenia, o Egypto, o imperio grego, sob o governo dos Paleologos, os senhorios francos contemporaneos, existentes na Grecia até á celebração do tratado de Turim (1381), a Bulgaria, a Asia Menor turca, as caminhos ou vias commerciaes do sul, partindo do Oriente para o Mediterraneo, as novas regiões e vias commerciaes abertas pelos tartaros (a Armenia menor, Trebizonda, Persia, os paises da India, as colonias nas margens septentrionaes do *Pontus,* a Asia Central e a China). O terceiro periodo refere-se aos turcos gregos e francos na peninsula balcanica (1381-1453) á Asia menor turca, aos ultimos tempos do imperio de Trebizonda, ao destino e fim das colonias nas margens septentrionaes do *Pontus,* á Asia Central, China e Persia e, por ultimo, ao apparecimeuto dos portuguêses nas Indias e á conquista da Egypto pelos turcos.

São curiosos, no livro de Heyd, os capitulos respeitantes á peninsula iberica, especialmente pelas informações que encerram sobre o commercio dos catalães com a Syria, com o Egypto, com o imperio bysantino, com as ilhas do archipelago grego, etc.

Observa-se que já em 1290 concedia o imperador Andronico plena liberdade commercial aos catalães, nos seus dominios, e que, no fim do seculo XII, tinham influencia consideravel em Tyro (Syria). Cerca de 1293 (1180) apparecem os catalães occupando uma posição consideravel em Chypre e na Armenia.

O celebre codigo de direito maritimo «*Consolat del Mar*» é

o mais importante e mais seguido para o regulamento do commercio do Mediterraneo, nos seculos XIV e XV ([1]).

A influencia dos catalães no Occidente europeu luctou vantajosamente com a dos genovezes e dos venezianos, até á tomada de Constantinopla (1290-1453). Mas deve observar-se que são tambem importantes as informações sobre Montpellier e seu valioso commercio com o Oriente, por isso que esta importante cidade, sujeita á dynastia de Aragão, como Barcelona, desde 1204, deveu a esse commercio a sua propriedade.

Do papel que Portugal desempenhou no mesmo commercio occupar-nos-hemos mais adiante.

Á face do 2.° volume da obra de HEYD, podemos estabelecer a seguinte relação das mercadorias, que constituiam o commercio com o Oriente e dos compradores d'ellas:

Mercadorias — Especie humana (escravos) — Productos naturaes; — 1, pedra hume; 2, aloes; 3, ambar; 4, balsamo; 5, algodão; 6 benjoim; 7, pau Brazil; 8. sandalo; 9, costus; 10, pedras preciosas; 11, marfim; 12, ruivo e outras materias tinturiaes; 13, linho; 14, galanga; 15, gallas tinctoria; 16 cravo; 17, indigo; 18, gengibre; 19, camphora; 20 cardamomo; 21, grã; 22, coral, 23, lacca; 24, ladanum: 25, manná; 26, resina-mastix; 27, almiscar; 28, mumia; 29, nóz moscada; 30, mirobolãs; 31, perolas; 32, pimenta negra; 33, pimenta branca; 34, pimenta comprida; 35, rhuibarbo; 36, cassia fistula; 37, açafrão; 38, sandalos differentes; 39, scamonio; 40, seda (como materia prima); 41, astragalo; 42, tutia; 43, incenso; 44, zedoar; 45, canella; 46, assucar. Productos manufacturados — 1, vidro; 2, fio de prata e de ouro; 3, porcellana; 4, tecidos varios: lã, algodão, seda, brocados.

Compradores, pela sua ordem: — França, paises de Flandres, Espanha e Portugal, Inglaterra, Allemanha, Scandinavia e Russia.

([1]) Traducção commentada — Consulat de la Mer ou pandectes du droit commercial et maritime faisant loi en Espagne, en Italie, à Marseille et en Angleterre et consulté partout ailleurs, comme raison écrite — Traduit du catalan en français d'après l'édition originale de Barcelone de l'an 1494... por P. B. BOUCHER. Paris 1808, II vol.

Passado assim em revista o commercio com o Oriente, fallemos agora dos judeus.

Por tal fórma os judeus exerciam a usura, que não tardaram a provocar os protestos dos povos e até medidas repressivas, as quaes partiram especialmente da Igreja. Effectivamente, esta chegou a prohibir-lhes que tirassem lucros excessivos, obrigando-os, em certos casos, á restituição. Assim, em diversos synodos realisados, no seculo XIII, em Avinhão, Narbona, etc., declarou-se que se devia impedir os judeos de praticar a usura, excomungando todos os christãos, que se deixassem arrastar a tratar com elles negocios d'esse genero [1].

Não se julgue, porém, que um grande principio de equidade determinasse o procedimento da Igreja. Invocava-se o principio do *justo preço (justum pretium)* das coisas, para todos os generos serem vendidos por preço equitativo; mas, como demonstra GIRARD, a noção de *justo preço* não é estrictamente equivalente aos gastos da producção; não é, portanto, a condemnação do principio do *accrescimo de valor* [2]. N'estes termos, a noção do preço fica singularmente elastica e o accrescimo de valor póde ir tão longe quanto se queira, principalmente fóra do mercado local. Era por isso que nem o commercio do Levante, nem as grandes feiras se submettiam ao *justo preço*. O commercio do Levante, especialmente, permittia realisar lucros consideraveis porque se exercia em mercadorias riquissimas, com peso diminuto.

Explica-se pela usura uma boa parte das perseguições soffridas pelos judeus e que se manifestaram sob variadas formas, entre as quaes se destaca a de pesados tributos. Ricardo Coração de Leão obrigou-os a pagarem um imposto equivalente á decima terceira parte das rendas do Estado.

Em todo o caso, nos primeiros assomos do capitalismo, no seculo XIII, a figura do judeu apparece-nos dominante:—dominando as sociedades, porque, senhores de fortunas colossaes, até aos proprios reis emprestavam dinheiro; dominando o commercio, porque dependiam d'elles os recursos para alimentar as communicações entre a Europa e as outras partes do mundo; dominando

[1] Ch. HÉFELÉ, *Histoire générale des conciles.*
[2] GIRARD, *Histoire de l'économie sociale jusqu' à la fin du* XVI^{o} *siècle.*

a industria, porque tinham nas suas mãos os destinos de fabricas importantissimas e, portanto, a sorte dos seus operarios; dominando, emfim, os negocios, com a pujança da sua actividade e a valia dos seus recursos pecuniarios.

Examinemos ainda outra face da questão:

A constituição dos *mesteres* ou *officios* dá-nos o singular aspecto da organização do trabalho no seculo XII.

O *mestereiro* precisava, para exercer o seu mister, de qualidades pessoaes e recursos (posses).

Os estatutos francezes dos *métiers* dizem expressamente: *Quiconques veut estre de tel mestier, estre le puet poer tant qu'il sache le mestier et ait de coi»* (1).

As posses precisas para os differentes mesteres variavam muito, sendo certo que houve sempre grandes differenças nos limites, que lhes eram marcados. Assim, no seculo XIII havia em Pariz, segundo o «*Registre de la taille*» (1292), um chapelleiro, com 19.000 francos de rendimento annual; um fabricante de pannos, com 9.000; varios, com mais de 5.000; mais de cem com rendimento superior a 1.000; tendo a maior parte rendimento superior a 250 francos.

MARTIN-SAINT-LÉON, no seu livro «*Histoire des corporations*» (1897) menciona os seguintes rendimentos: Mais de 1.000 francos, 1; 5.000 a 10.000 francos, 6; 1.000 a 5.000 francos, 121; 250 a 1.000 francos, 375; 50 a 250 francos, 821.

Houve sempre enormes differenças entre os rendimentos de artifices do mesmo officio. Por exemplo: entre os fabricantes de tecidos de lã de Francfort s/M, no seculo XIV, havia onze que tinham o direito de fabricar 36 peças de panno e 49 que só podiam fabricar 4 peças (2).

Na legislação allemã, franceza e ingleza dos seculos XIV e XV acha-se nitidamente expressa a affirmação de que o artifice aspirava a ganhar o bastante para viver e *não mais*, cada qual dentro dos seus limites.

Assim, a formação dos mesteres, com todas as suas disposições e legislação, tendentes a regularisar a producção e a venda dos

(1) E. LEVASSEUR, *Histoire des classes ouvrières et de l'industrie en France*, pag. 79.

(2) W. SOMBART, *Der Moderne Kapitalismus*, I, pag. 82.

productos, não tinha caracter essencialmente capitalista. Destinava-se, sobretudo: 1.° a facilitar a producção, tornando independente o artifice; 2.° a transmittir e conservar o saber technico e os segredos do officio; 3.° a promover uma legislação, interna e externa, favoravel aos mesteres [1].

Segundo Werner Sombart, as condições fundamentaes para a existencia dos mestereiros eram as seguintes:

I. Condições de população:

a) Augmento progressivo da população.

b) Augmento da densidade da população.

II. Condições technicas de producção e venda:

a) Estabilidade dos preços das materias primas:

b) Condições technicas da producção proprias do mestereiro, por exemplo, pouca variedade nos productos a fabricar, ausencia de *modas*, longo tempo empregado em fabricar um objecto.

c) Venda segura n'um mercado estavel e firme, em que não haja desequilibrio entre compra e producção, antes um excesso do pedido sobre a producção.

d) Desenvolvimento seguro do mercado, motivado pelo augmento das classes compradoras, que cresçam mais rapidamente do que a classe dos fabricantes.

e) Permanencia e estabilidade dos preços a uma altura grande, absoluta, em comparação com os preços das materias primas [2].

A epocha em que estas condições se aproximam mais da sua realisação simultanea foi o começo da Idade Media.

Na Idade Media tambem, a accumulação de grandes sommas de dinheiro e a formação de grandes conjunctos de propriedades materiaes de toda a especie constituiram-se: na *camera* apostolica, nas ordens religiosas de cavallaria, nas mãos dos reis de França e da Inglaterra, nos senhorios e nas cidades.

1.° *Na camera apostolica.* — Já no seculo XIII estava aperfeiçoada a organisação financeira pontificia, cujas bases foram lan-

(1) W. Sombart, *Ob. cit.*, I, pag. 130.
(2) W. Sombart, *Ob. cit.*, I, pag. 159.

çadas por Innocencio III (1198 e 1216). As rendas, dadivas, impostos, etc., vindos de toda a parte, eram transformados em moeda.

Os maiores rendimentos provinham das decimas para as cruzadas. As sommas provenientes d'esse imposto, que não era annual, são calculadas, no seculo XIII, em 3.500 a 4.500 contos de reis, moeda actual.

Clemente V deixou na Curia um thesouro, cujo valor é calculado em mais de 2.300 contos, moeda actual.

2.º *Ordens religiosas da cavallaria.*—As sommas accumuladas pelas ordens religiosas de cavallaria eram consideravelmente superiores ás da Curia romana. Provinham, geralmente, de rendimentos de terrenos e propriedades, que se espalhavam por todo o mundo conhecido.

Os Templarios tinham, no seculo XIV, propriedades em toda a Europa.

O numero de solares dos Templarios era, no seculo XIII, de 9.000; em 1307, era de 10.500. O dos Hospitaleiros era de 19.000.

Cada solar podia sustentar um cavalleiro e armal-o, o que correspondia a um rendimento annual dos Hospitaleiros de 7.000 contos de reis e dos Templarios de 9.000 contos.

MICHELET define n'estas conceituosas palavras o caracter dos Templarios: «Com taes privilegios, taes riquezas e taes dominios era-lhes bem difficil manterem-se humildes» [1].

E um insuspeito historiador portuguez caracterisa n'estes termos o procedimento dos mesmos Templarios: «Entrára o grão-mestre em França, vindo de Chypre, aonde se retirára com os mais catholicos na ultima e infausta derrota da Palestina. No mesmo anno se tiraram inquirições dos costumes depravados e infames dos Templarios e no de 1307 já estava preso o grão-mestre e sessenta e tantos cavalleiros» [2].

3.º *Reis de França.* — Nos seculos XIII e XIV, o rendimento annual dos reis de França era de 800 a 1.000 contos.

---

(1) J. MICHELET, *Histoire de France,* IV, pag. 29.
(2) FR. BERNARDO DA COSTA, *Historia da Militar Ordem de N. S. Jesus Christo,* pag. 116.

4.° *Reis de Inglaterra.* — Tinham, no seculo XIV, a media de 14.000 a 16.000 contos de reis de rendimento annual.

5.° *Senhorios.* Variavam as rendas dos senhorios, abrangendo sob esta designação aquelles que tinham rendimento importante proveniente de fundos, terras ou outros dominios. Dos rendimentos d'um duque de Flandres, d'um duque inglez aos rendimentos de um simples senhor feudal ou *squire*, ia, como é natural, grande distancia.

6.° *As cidades.* Na Idade Media, só Veneza, Milão e Napoles tinham rendimentos que se approximassem dos do Papa ou dos reis. Em 1492, Veneza tinha 200 contos de reis; Milão e Napoles 120 contos de rendimento annual.

Londres, Paris, Barcelona, Sevilha, Lisboa, Bruges e Gand, tinham grandes rendimentos.

As descobertas maritimas do seculo XV provocaram a abertura de novos mercados e novos centros de producção.

As feiras de Lyon tornaram-se, no tempo de Francisco I, a grande Bolsa internacional de mercadorias e valores mobiliarios. Os grandes bancos de Augsburgo e Nuremberg, os Welser e os Fuggers dominavam o mercado dos metaes.

Por tal forma se abusava do credito que, no começo do seculo XVI, houve em Paris uma bancarrota de 4 milhões de francos.

Em 1620, começou a lançar-se nas letras de cambios a clausula *á ordem*, que lhes veio dar consideraveis facilidades de circulação e transmissão [1].

Coincide com esse prodigioso desenvolvimento do credito o desenvolvimento de novas industrias, taes como as industrias do livro e as do luxo, as industrias da Renascença.

A concentração do capital só se opera, porém, verdadeiramente nos dois seculos seguintes, especialmente na grande industria.

Essa concentração operou-se com tal rapidez, que chegou a alarmar muitos espiritos. Colbert fez esforços para multiplicar as manufacturas, a fim de obrigar os mestres a dar mais alguma coisa aos operarios, «de modo que os mestres de uma só ma-

[1] Fagniez, *Economie sociale de la France, sous Henri IV.*

nufactura não se tornem senhores dos operarios, aos quaes não dariam senão o que lhes aprouvesse» [1].

Apesar, porém, de todas as precauções, a concentração foi por diante.

As pequenas industrias iam tendendo a desapparecer e no seculo XVIII vemos já o capital assumir o papel de dominador e soberano. As *grèves* de operarios tornam-se frequentes e até as coligações de industriaes se estabelecem, por vezes.

São os aspectos d'essa poderosa evolução que vamos examinar em Portugal, por isso que, mais ou menos intensamente, ella faz sentir até nós os seus effeitos.

IV.

Origens do capitalismo em Portugal

Acompanhando as mais remotas manifestações da evolução do capitalismo moderno em Portugal, teremos de ir buscar as suas raizes ao seculo XIII, se bem que a éra capitalista principie, propriamente, como já dissemos, com o seculo XVI.

No seculo XIII começarão, portanto, as nossas investigações:

Seculo XIII

O seculo XIII abriu por uma forma devastadora na Europa. O luto e o pranto rompiam de todos os angulos do reino e a população da peninsula, rareada pelo flagello, só ao cabo de muitos annos se restaurou do enfraquecimento [2].

Foi por meio da crescente riqueza monetaria do povo, que nos meiados do seculo XIII começou a simplificar-se a machina complexa da fazenda publica e os chamados foraes de Affonso III

---

(1) CILLEULS, *Histoire et régime de la grande industrie.*
(2) *Chronicon conimbricense. Esp. Sagrad.*, tom. 23.º, pag. 333.

são, no seu maximo numero, o monumento e a expressão d'esse facto [1].

Antes d'isso, no seculo XI a moeda era rarissima e assaz rara ainda no seculo XII.

A passagem para a economia-dinheiro faz-se lenta, mas progressivamente: os vestigios do apparecimento da moeda tornam-se de cada vez mais distinctos, se bem continue a subsistir nos aforamentos e foraes primitivos o tributo fixado em generos. Ao mesmo tempo, accentuam-se o movimento commercial, o accrescimo da riqueza e o maior giro dos metaes amoedados.

E essa transformação, por mais que pareça restricta a um facto de caracter precisamente economico, é, realmente, um facto de alcance politico, por isso que a substituição das multiplicadas rações, direituras, forragens, colheitas, etc. por uma renda certa, em ouro ou prata, libertava os concelhos das prepotencias dos ricos-homens e dos prestameiros, minorando os abusos e vexames praticados pelos officiaes do fisco.

Mas no valor da moeda havia uma tal incerteza, que produziu graves transtornos e provocou sérios protestos. O rei disfructava o direito da *quebra*, que se marcava, ao que parece, de sete em sete annos; mas de tal forma o augmento do valor nominal da moeda antiga e a cunhagem de outra nova viciada levantaram reclamações, que, de commum accordo, os prelados, os barões, as ordens monasticas e militares e os concelhos pediram a convocação das côrtes de Coimbra, em 1261, nas quaes, após discussão agitada, se decretou que as moedas antigas fossem restituidas ao estado primitivo, que nunca mais n'ellas se fizesse alteração do valor nominal ou real e que as novas, que o rei começára a cunhar, e que eram de inferior toque, valessem em relação ás antigas, na razão de quatro para tres [2].

Essa concessão foi, porém, conquistada por uma forma extranha:—pela imposição de uma derrama unica, mas geral, sobre a propriedade, pagando-a apenas os possuidores de bens até mil

---

[1] A. HERCULANO, *Historia de Portugal*, tomo 3.°, pag. 57.

[2] Actas das côrtes de Coimbra de 11 de abril de 1261, no Livro I de Affonso III.

libras, ficando todas as fortunas, que excedessem mil *libras*, isentas de serem tributadas pelo excesso.

Obedecia, evidentemente, o plano ao proposito de lançar sobre o povo o encargo da remissão da moeda, como vieram proval-o mais claramente as isenções absolutas e directas aos bispos, com alguns dos seus familiares, aos chefes das ordens militares, aos religiosos, aos cavalleiros de espada á cinta e seus filhos, ás donas nobres, aos conegos e raçoeiros das cathedraes, notando-se ainda que para os burguezes ricos dos mais opulentos concelhos o gravame era leve.

Faz notar Alexandre Herculano, e com razão, que os debates das côrtes de Coimbra trouxeram como consequencia pôr cobro ás perturbações, que a cubiça ou as necessidades dos principes podiam, de annos a annos, produzir na situação interna e ainda externa do reino ([1]).

A esse tempo, a Igreja portugueza chegára ao cumulo de poder, como nos dá conta Coelho da Rocha ([2]); dispunha de varias riquezas, adquiridas, na sua maior parte, por doações, que os reis e os grandes senhores do paiz eram os primeiros a animar e cujos motivos se podem encontrar na piedade, no medo, no interesse, mas especialmente n'uma falsa comprehensão do espirito religioso, como se deprehende de factos revelados por Schaeffer, na sua «Historia de Portugal» ([3]).

Foi assim que o clero adquiriu vastos dominios; assim se tornou rico, de modo a constituir uma verdadeira força.

A tal ponto chegou a absorpção, que D. Diniz promulgou a lei de 10 de julho de 1286, restabelecendo o preceito de uma lei de 1211, dictada por Affonso II, mandando que os predios comprados pelas religiões e pelos membros do clero fossem vendidos, no praso de um anno. ([4])

Por outro lado, a diffusão das instituições vinculares, conhecidas pela denominação de *morgados*, especialmente no ultimo quartel do seculo XIII, muito contribuiu para immobilisar a terra,

---

([1]) A. Herculano, *Ob. cit.*, tomo 3.º, pag. 72.
([2]) C. da Rocha, *Ensaio sobre a historia do governo e da legislação de Portugal*, etc pag. 56.
([3]) Schaeffer, *Historia de Portugal*, traducção portugueza, pag. 135.
([4]) Rebello da Silva, *Memoria sobre a população e a agricultura de Portugal*, pag. 135.

por isso que dava em resultado ser dotado um só filho, á custa de todos os outros. Bastas vezes, esse individuo era um inepto ou um ocioso, incapaz de dedicar uma parcella de intelligencia ou de actividade á cultura da terra.

D'est'arte, comprometlia-se consideravelmente o desenvolvimento da riqueza publica e da particular.

Ao lado do clero e dos morgados, que englobavam terras e capitaes, estava uma entidade, que mais assiduamente manipulava o dinheiro. Eram os judeus.

Ao fundar-se a nacionalidade portugueza, os judeus espalhados pela peninsula iberica já gosavam de relativo bem-estar e a sua situação era o mais lisongeira possivel (1). Os primeiros monarchas usaram para com os judeus uma politica de provada tolerancia, chegando Affonso Henriques a ceder em propriedade a Yahia-aben-Yaïsch, um dos judeus mais nobres de Portugal, que se dizia descendente da casa real de David (2) algumas aldeias, permittindo-lhe usar brazão, tudo isto em recompensa do auxilio, que lhe prestára, para a libertação do sólo portuguez do dominio dos mouros.

As fortunas de alguns judeus estabelecidos em Portugal eram collossaes. KAISERLING refere-se a um dos homens, que mais influencia teve no tempo de D. Diniz, o arrabi-mór D. Judáh, que o monarcha chamou para gerir os negocios da fazenda; era tal a sua fortuna, que estava habilitado a emprestar a somma de 6000 *libras* para a compra da villa de Mourão (3).

Mas as ambições desmedidas dos judeus motivaram, mais tarde, medidas repressivas. N'um documento do reinado de Affonso III, de 1254 ou 1261, lê-se: «he estabeleçudo pola maliçia dos judeus que como alguem deles tirar emprestado nunca cresca mais do cabo como quer que muytos estes seiam feitos auendo começo do primeiro stromento» (4).

O incendio da judiaria inteira de Lisboa deu em resultado a sahida de muitos judeus importantes para Castella, onde, diz KAISERLING, pouco havia que os attrahisse (5).

---

(1) J. MENDES DOS REMEDIOS, *Os judeus em Portugal*, pag. 116 e 119.
(2) KAISERLING, *Geschichte der Juden in Portugal*, cap. X.
(3) KAISERLING, *Ob. cit.* pag. 19.
(4) *Portugaliae Monumenta Historica*, pag. 250.
(5) KAISERLING, *Ob. cit.*, pag. 26.

Ao lado dos judeus estavam os Templarios, com planos exaggeradamente ambiciosos.

A Historia de Portugal, no seculo que estudamos, offerece bastas provas d'essa ambição e das represalias, que ella motivou. Com o desenvolvimento da vida municipal vamos assistindo a uma serie de factos, que, por muito diversos que pareçam, têem, todavia, entre si analogias palpitantes.

Na evolução do municipalismo apparecem-nos, mais de uma vez, os Templarios, com o seu poder absorvente.

Cita Herculano (1) que o concelho da Guarda déra aos Templarios, nos termos da villa, na aldeia ou logar de Touro, herdamento sufficiente para ser lavrado com seis jugos de bois. Foram n'o elles dilatando pelos terrenos adjacentes. «Os da Guarda parece terem tolerado estas usurpações; mas, quando viram que os templarios construiram ahi um castello, marcharam contra elles e derribaram-lh'o».

Para o estudo do capitalismo, sob o ponto de vista portuguez, tudo quanto se sabe sobre os Templarios está referido á ordem de Christo, cujo mestrado veio a encorporar-se na realeza e os seus bens tornaram-se bens da coroa (2).

Seculo XIV

Reproduzem-se e continuam-se no seculo XIV muitos dos factos, que acabamos de enumerar.

Os primeiros tempos da organisação do reino de Portugal não foram, pois, propicios á constituição da propriedade capitalista. As guerras assoladoras contra os sarracenos, as luctas contra os reis de Leão, as discordias civis, profundamente devastadoras — tudo isso era uma causa violenta de perturbações. Nas regiões do sul do reino, especialmente, a lucta, demorando-se, atrasou por seculos a população e a cultura.

---

(1) A. Herculano, *Historia de Portugal*, tomo 4.º, pag. 183.

(2) «... as jurisdicções, senhorios, castellos e commendas, e mais bens d'esta infelizmente gloriosa religião, passaram para a gloriosamente feliz Ordem de Christo.» — «*Supp. hist. ou Mem. e Not. da celebre Ordem dos Templarios*», Alex. Ferreira, 1735, anteloquio.

Com o decorrer dos tempos, a população foi crescendo, porém com pouca intensidade, sobretudo fóra dos concelhos. É certo que as municipalidades se fortaleceram; mas nem o trabalho nem a producção acompanharam esse progresso. O desenvolvimento dos factores da verdadeira riqueza economica era embargado pela viciosa organisação da propriedade, pela influencia esterilisadora de muitas instituições e tambem pela acção frequente e funesta das guerras, das epidemias, da fome e dos terremotos, não devendo esquecer-se a oppressão, sempre crescente, do clero e dos nobres.

Collocamos em primeiro lugar, e com sobeja razão, a viciosa organisação da propriedade porque, em verdade, foi ella que mais contribuiu para a decadencia da economia rural do paiz. A essa causa junta Rebello da Silva os encargos, que oneravam a propriedade, a desigualdade da condição civil das pessoas, a falta de segurança, então quasi geral, e os obstaculos suscitados pela organisação quasi anarchica do imposto, do commercio e do trabalho ([1]).

As maiores e melhores propriedades estavam em poder das corporações de mão morta, das ordens militares, dos ricos-homens e do rei, que as alienava frequentemente do dominio da coroa, para saciar a ambição das classes privilegiadas.

Os aforamentos collectivos de casaes encabeçados, typo seguido na provincia de Entre-Douro e Minho, com maior constancia do que nas de Traz-os-Montes, Beira, Estremadura e Alemtejo, favoreciam mais os progressos da cultura do que as bases adoptadas para a povoação das localidades de outras circumscripções ([2]).

Assumiam, no seculo XIV, as proporções de verdadeira extorsão as clausulas impostas pelo soberano aos colonos nos emprazamentos dos reguengos, pelas corporações religiosas nos seus vastos dominios e pelos senhores seculares nos aforamentos dos dilatados ermos devidos á munificencia dos principes.

Por outro lado, os rigores do fisco, a avidez dos senhorios e

---

([1]) REBELLO DA SILVA, *Memoria sobre a população e a agricultura de Portugal*, pag. 130.
([2]) REBELLO DA SILVA, *Ob. cit.*

donatarios, compromettiam o desenvolvimento da riqueza nacional, consideravelmente ameaçada e ferida pelas guerras e discordias incessantes, que levavam a destruição e a ruina por toda a parte.

Ao mesmo tempo que D. Fernando se sentia prodigo de rendas publicas, do thesouro proprio e dos bens da coroa, liberalisando as mais largas doações aos fidalgos castelhanos do seu partido e aos portuguezes do seu valimento, as cearas eram calcadas aos pés de cavallos e os celleiros despejados pelas violencias da melicia (1).

Pelo que diz respeito á influencia dos judeus, limitar-no-hemos a observar que a protecção dispensada por D. Diniz levantou calorosos protestos, os quaes se fizeram especialmente sentir na concordia celebrada em Lisboa, em 1347 (2).

D. Affonso IV deu ouvidos a esses protestos, promulgando uma serie de medidas, especialmente respeitantes a impostos e usuras. Quer comprasse, quer vendesse, fosse para uso proprio ou para alheio, o judeu pagava sempre e a todos os respeitos. Quanto á usura, o rei prohibiu-a e estabeleceu que quem a exercesse perderia a usura e a somma emprestada (3).

D. Pedro I seguiu as tradições de seu pae; mas a oppressão contra os judeus não chegou tão longe como em Espanha, onde lhes era defezo poderem adquirir bens de raiz. Esta concessão atrahiu para os judeus portuguezes maior somma de capitaes, como prova o facto, referido por Brandão, na «Monarchia Lusitana», de um repatriado de Navarra ter vindo instituir um morgado de muitas quintas, nos arredores de Lisboa (4).

Não vem para aqui relatar por miudo as peripecias da famosa conspiração contra D. João, rei de Castella, em que entrava, como principal figura, o conde de Trastamara, servindo de intermediarios dois judeus e D. Leonor Telles. Com a entrada de D. Leonor no convento de Tordesillas, varios judeus partidarios da sua politica refugiaram-se em Castella, abandonando todos os bens que possuiam em Portugal, dos quaes o mestre de Aviz

(1) Rebello da Silva, *Ob. cit.*, pag. 138.
(2) *Monarchia Lusitana*, VII, pag. 86.
(3) *Ord. Affonsinas*, l. 2.º tit. LXXXXVI.
(4) *Monarchia Lusitana*, t. 6.º l. XVIII, pag. 14 e 15.

se aproveitou para espalhar profusamente beneficios e doações, entre vassallos que se tinham notabilisado no amor á causa da liberdade.

Assim, por exemplo, a Vasco Gonçalves Camello deu a renda dos direitos dos judeus do Porto, Gaya e Monchique (1), a D. Nuno Alvares Pereira os bens de D. David Negro, assim como o serviço real dos judeus de Lisboa (2), etc.

Ao findar o seculo XIV, contrastavam com as crueldades de que os judeus eram victimas em Espanha as concessões de toda a ordem, que em Portugal lhes eram outorgadas por D. João, cuja tolerancia se revelava nas leis, que promulgava, e nos privilegios, que concedia (3).

Passando a examinar a influencia dos Templarios, achamos, no começo do seculo XIV, o bispo da Guarda, como procurador do concelho de Idanha Velha, representando a D. Diniz contra o senhorio dos Templarios, não só na Idanha, cujo foral se oppunha a que o concelho sahisse do immediato dominio do rei, mas exigindo tambem que se lhes tirasse o de Proença e do Rosmaninhal, para estas villas ficarem consideradas como dependencias da Idanha (4).

A representação diz assim:

«Vosso tio D. Sancho, povoando a Idanha, deu-lhe termos, a que pôs marcos. Sem consentimento, antes contra vontade do concelho, o mestre Pedro Alvitiz passava Proença e o freire Estevam de Beaumont o Rosmaninhal, ficando ambas as povoações situadas dentro de marcos, que assignalam os termos. E agora a Ordem passou os dois logares, apesar da opposição do concelho de Idanha Velha, ao qual devem pertencer e ao qual os moradores d'esses logares devem servir e guardar respeito, como é costume dos aldeiões para com os respectivos cidadãos, em cujos termos vivem e cujo fôro hão»

De resto, a esse tempo, como se sabe, a Ordem dos Templarios era supprimida em todos os Estados da christandade, «como inutil ou perigosa» (5).

---

(1) *Monarchia Lusitana*, l. cit. pag. 595, col. 1.ª
(2) *Monarchia Lusitana*, ibid. pag. 523, col. 2.ª
(3) *Ordenações Offonsinas*, l. 2.º
(4) A. Herculano, *Historia de Portugal*, t. 4.º, pag. 184.
(5) J. Michelet, *Histoire de France*, IV, pag. 74.

Em Portugal foi extincta em 1311, a despeito do que affirma ácerca da pureza da Ordem fr. Bernardo da Costa na sua «Historia da Militar Ordem de Christo» (1).

Pela extincção, os Templarios foram privados dos bens da Ordem, que eram valiosissimos, como se deprehende das proprias palavras de fr. Bernardo da Costa quando escreve: «Prova-se de tantas e tão magnificas doações, que desde a primeira introducção, elles tiveram n'este reino até sua fatal extincção, assim feitas pelos reis, como pelos vassallos d'elles successivamente, pelo espaço de tantos annos». Estas affirmativas são confirmadas na Historia da Ordem Militar de Christo por um sem numero de documentos de doações.

Em que consistiam os bens sequestrados, dil-o Alexandre Ferreira quando especialisa «os thesouros, as rendas, as joias, as alfaias, as escrituras» (2).

A inveja dos reis não contribuiu pouco para a queda dos Templarios. Bastava para isso a magestade com que se tratavam os grão-mestres. «O trato era esplendidissimo; a meza franquissima; a dependencia muito grande; o cortejo extraordinario, porque não era só dos muitos cavalleiros, como subditos, mas dos que o queriam ser como dependentes e descrevem muitos authores que a magestade da sua côrte em nada cedia á da corôa de França» (3).

(Continúa).

(1) «Muitas e repetidas inquirições publicas e particulares se tiraram dos procedimentos dos Templarios n'este reino e nas Hespanhas, assim como se tiraram em França e mais provincias da christandade. Emquanto ás que se praticaram em Portugal, em Castella, Leão, etc., elles sahiram como o ouro das chammas do fogo.» — Fr. B. da Costa. *Historia da Militar Ordem de N. S. Jesus Christo*, pag. 116.

(2) A. Ferreira, *Memorias da Ordem dos Templarios*, pag. 70.

(3) A. Ferreira, *op. cit.*

BIBLIOGRAPHIA

*Correspondance d'*HERMITE *et de* STIELTJES *publiée par les soins de B.* BAILLAUD *et H.* BOURGET. Paris, Gauthier-Villars, 1905-1906.

A correspondencia entre dois grandes homens que se occupam dos mesmos assumptos, é quasi sempre extremamente instructiva. Permitte muitas vezes seguir a evolução das suas ideias no estudo das questões que consideram, appreciar as difficuldades que encontram, e conhecer outras circunstancias, mais ou menos interessantes, que na maior parte das vezes, a memoria ou nota onde publicam o resultado final das suas indagações, não revela.

Está n'este caso a interessantissima correspondencia entre HERMITE e STIELTJES. O primeiro um grande mestre, o segundo um grande discipulo, que, cultivando ambos com grande amor a theoria dos numeros e a theoria das funcções, vão communicando um ao outro os resultados que successivamente vão obtendo a respeito d'estas theorias, collaborando mesmo algumas vezes juntos para resolver as mesmas questões. Infelizmente, já ambos falleceram, o primeiro em idade avançada depois de uma vida cheia de gloria, inteiramente consagrada á sciencia, o outro novo ainda, quando tanto havia a esperar do seu bello talento.

São considerados nas cartas a que nos estamos referindo muitos e variados assumptos scientificos, e não nos é porisso possivel dar aqui indicação d'elles. Revelam todos os altos dotes de intelligencia e a delicadeza de sentimentos dos geometras eminentes que as escreveram, e, em especial, nas de HERMITE aquella affectuosidade tão conhecida de todos os que tiveram a felicidade de ter relações com este grande geometra.

Foram M. BAILLAUD e M. BOURGET, amigos e companheiros de STIELTJES na Universidade de Toulouse, que dirigiram esta publicação, com o que fizeram um serviço importante a todos os

que amam as sciencias mathematicas. As cartas nella contidas estão distribuidas por dois volumes, o primeiro dos quaes contém ainda uma interessante noticia biographica sobre Stieltjes, redigida por M. Bourget, e um bello prefacio, devido a M. Picard.

C. Hermite: *Oeuvres*, t. I. Paris, G. Villars, 1905.

O nome de Ch. Hermite occupa um dos primeiros logares na lista dos geometras mais eminentes que floresceram no seculo XIX. Na Arithmetica superior, na Algebra e na Analyse, ramos das sciencias mathematicas a que consagrou a sua attenção, deixou numerosos e brilhantes vestigios do seu poderoso genio. A leitura dos seus trabalhos é das mais attrahentes, não só pelo valor dos resultados que encerram, como tambem pela fórma elegante e expressiva como são apresentados. Hermite, ao contrario de alguns outros inventores, prestava muita attenção ao modo de expôr os resultados das suas descobertas. Manifestando a sua opinião a este respeito, dizia-nos elle em uma carta que nos fez a honra de nos dirigir em 14 de dezembro de 1885: *après le travail de l'invention, il en a un autre dont nos maîtres en Analyse ont donné l'exemple et le modèle, de sorte que les oeuvres de Gauss et de Jacobi joignent à l'importance et à l'éclat des découvertes le mérite d'une forme parfaite*. Aos nomes tão justamente mencionados n'esta passagem póde reunir-se tambem o nome do grande mestre que as escreveu, e para o justificar basta ler os seus admiraveis *Cursos de Analyse* da Escola Polytechnica e da Faculdade de Sciencias de Paris.

A carreira de Hermite foi longa e inteiramente consagrada á sciencia. Porisso os seus trabalhos são numerosos e estão espalhados pela maior parte das collecções mathematicas do mundo, cujos directores procuravam, como grande honra para essas collecções, a collaboração do grande geometra francez. A Academia das Sciencias de Paris tomou sobre si o promover a reunião d'ellas em uma obra unica, prestando assim um alto serviço aos geometras de todos os paizes, e uma bella homenagem ao sabio que tanto honra deu a esta alta corporação scientifica.

O primeiro volume d'esta obra está publicado. Encontram-se n'elle os primeiros trabalhos que Hermite consagrou á theoria

das funcções ellipticas e abelianas, entre os quaes as cartas a **Jacobi** sobre estas ultimas funcções, que se tornaram célebres e que chamaram pela primeira vez para elle a attenção dos geometras. Contem tambem este volume muitos trabalhos consagrados á theoria dos numeros, á theoria algebrica das formas, etc., de que não nos é possivel dar aqui noticia detalhada. Como introducção, contém ainda uma noticia magistral sobre a obra de **Hermite**, objecto de uma lição feita por M. **Picard** na Sorbonne pouco tempo depois da sua morte.

G. **Darboux**: *Notice historique sur Charles Hermite*. Paris, G. Villars, 1905.

Do trabalho de M. **Picard** mencionado no fim da noticia precedente convem approximar aquelle cujo titulo vimos de escrever, o qual foi lido na sessão publica da Academia das Sciencias de Paris em 18 de dezembro de 1905. Em um e outro é feita de um modo profundo a analyse da obra scientifica de **Hermite**. Este ultimo contem ainda informações vivamente interessantes sobre a sua vida tão simples e tão sympathica. São dois trabalhos admiraveis, que devem ler todos os que quizerem estudar as obras de **Hermite**, para bem poder avaliar a importancia das descobertas que encerram.

E. **Borel**: *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes*. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Este importante opusculo faz parte da collecção de monographias sobre a theoria das funcções que, debaixo da direcção de M. **Borel**, está publicando M. Gauthier-Villars, e contem as lições feitas na Escola Normal Superior de Paris por aquelle eminente geometra, durante o semestre de inverno de 1903 a 1904, as quaes foram redigidas por M. **Fréchet**.

Abre a obra por um capitulo consagrado á theoria das collecções de pontos; ao qual se seguem dois outros consagrados ao

estudo da noção de continuidade das funcções e ao estudo da noção de correspondencia quasi uniforme, introduzida pelo auctor. Depois nos capitulos 4.º e 5.º é estudada com profundeza e desenvolvimento a questão da representação das funcções de variaveis reaes por series de polynomios. O caso das variaveis imaginarias é tambem estudado em uma nota importante, que a este livro junctou M. Painlevé.

R. Baire: *Leçons sur les fonctions discontinues*. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Este bello livro pertence á mesma collecção de monographias que o anterior, e contem as lições professadas por M. Baire no Collegio de França em 1904. O objecto d'estas lições foi, como diz M. Baire, procurar as funcções descontinuas representaveis por séries de funcções continuas. Para estudar este assumpto, á qual são consagrados os capitulos 1.º, 4.º e 5.º do livro mencionado, são tambem consideradas, nos capitulos 2.º e 3.º, algumas questões relativas á theoria das collecções de pontos e á theoria dos numeros transfinitos, que para isso é necessario conhecer.

Acrescentaremos que esta monographia, como a precedente e todas as outras da mesma collecção, das quaes se deu noticia no *Jornal de Sciencias mathematicas*, estão escriptas de modo que podem ser lidas pelos que conhecem sómente as noções de analyse actualmente classicas.

G. T.

SUR QUELQUES COMPLEXES DE DROITES

PAR

J. NEUBERG

Professeur à l'Université de Liège

---

1. Soient $UU' = u$, $VV' = v$ les perpendiculaires abaissées de deux points fixes U, V sur une droite variable de l'espace. On peut se proposer d'étudier les complexes des droites g qui satisfont à l'une des équations

$$\frac{u}{p} = \frac{v}{q}, \quad \frac{u^2}{p^2} + \frac{v^2}{q^2} = 1, \quad \frac{u^2}{p^2} - \frac{v^2}{q^2} = 1,$$

$$\frac{u}{p} \pm \frac{v}{q} = \pm 1, \quad uv = b^2, \quad u^2 = 2pv.$$

Tous ces complexes sont *de révolution autour de l'axe* UV, que nous désignerons par h; les trois premiers sont du second ordre, les trois derniers du quatrième ordre.

Le premier a été traité par M. Corin (*Mathesis*, **1904**, p. **177**); mes recherches sur le deuxième vont paraitre dans les *Wiskundige Opgaven*. Je donnerai ici quelques développements sur les autres de ces complexes sans vouloir épuiser le sujet ni même les rattacher à la théorie générale.

Le complexe $\frac{u^2}{p^2}-\frac{v^2}{q^2}=1$

2. Soient (fig. 1) F, F′ les points qui divisent le segment UV, additivement et soustractivement, dans le rapport $p:q$; le milieu O de la distance FF′ partagera le segment UV soustractivement dans le rapport $p^2:q^2$. Les projections E, E′ des points F, F′ sur une droite g du complexe diviseront la distance U′V′ harmoniquement dans le rapport $p:q$.

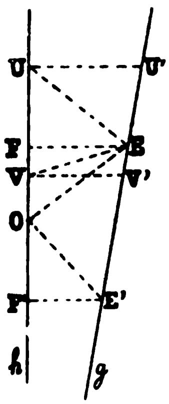


Fig. 1

Cela posé, la relation entre u et v devient

$$\frac{\overline{UE}^2-\overline{U'E}^2}{p^2}-\frac{\overline{VE}^2-\overline{V'E}^2}{q^2}=1,$$

ou simplement

$$\frac{\overline{UE}^2}{p^2}-\frac{\overline{VE}^2}{q^2}=1. \tag{1}$$

Or, le théorème de Stewart donne

$$\frac{\overline{UE}^2}{UV.UO}+\frac{\overline{VE}^2}{VU.VO}+\frac{\overline{OE}^2}{OU.OV}=1, \tag{2}$$

où il faut avoir égard à la règle des signes pour les facteurs des dénominateurs. De plus, si $UV=d$, on trouve facilement

$$UO=d\frac{p^2}{p^2-q^2},\quad VO=d\frac{q^2}{p^2-q^2}. \tag{3}$$

Par suite, l'équation (2) se transforme en

$$\frac{\overline{UE}^2}{p^2}-\frac{\overline{VE}^2}{q^2}=\frac{d^2}{p^2-q^2}-\frac{\overline{OE}^2(p^2-q^2)}{p^2q^2};$$

d'où, à cause de (1),

$$\overline{OE}^2=\frac{p^2q^2}{(p^2-q^2)^2}(d^2-p^2+q^2). \tag{4}$$

Ce résultat s'applique également au point E'.

3. L'égalité (4) nous conduit à distinguer trois hypothèses principales:

$$p^2>q^2,\quad p^2<q^2,\quad p^2=q^2;$$

nous désignerons les complexes correspondants par Γ_h, Γ_e, Γ_p.

Dans le premier cas, si $d^2<p^2-q^2$, le complexe ne comprend pas de rayon réel, et si $d^2=p^2-q^2$, les seuls rayons réels sont perpendiculaires en O sur l'axe. Nous supposerons donc $d^2>p^2-q^2$.

De la formule (4) on conclut que *le lieu des projections* E, E' *des points fixes* F, F' *sur les droites du complexe* Γ_h *est la sphère de centre* O *et de rayon*

$$a=\frac{pq}{p^2-q^2}\sqrt{d^2-p^2+q^2}. \tag{5}$$

Nous appellerons A, A' les points de rencontre de cette sphère avec l'axe h, et $2c$ la distance FF'. Comme

$$2c=\mathrm{UF'}-\mathrm{UF}=\frac{dp}{p-q}-\frac{dp}{p+q}=2\frac{pq}{p^2-q^2}d, \tag{6}$$

ou voit que $c > a$; donc les points F, F′ sont extérieurs à la sphère O.

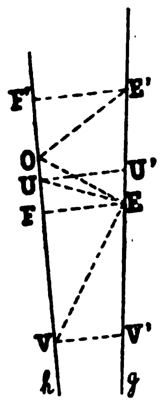


Fig. 2

Dans le complexe Γ_e (fig. 2), les points E, E′ appartiennent encore à une sphère de centre O et de rayon

$$a = \frac{pq}{q^2 - p^2}\sqrt{d^2 + q^2 - p^2}. \qquad (5')$$

On a maintenant

$$2c = VF' - VF = \frac{dq}{q-p} - \frac{dq}{q+p} = 2\frac{pq}{q^2-p^2}d, \qquad (6')$$

de sorte que $c < a$; donc les points F, F′ sont intérieurs à la sphère O.

Si $p = q$, appelons F le milieu de UV (fig. 3) et E la projection de F sur g. L'égalité $u^2 - v^2 = p^2$ se ramène à

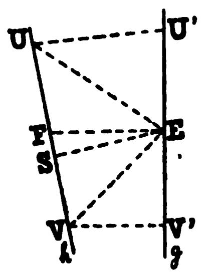


Fig. 3

$$\overline{UE}^2 - \overline{VE}^2 = p^2.$$

Soit S la projection de E sur h; un théorème connu donne

$$\overline{UE}^2 - \overline{VE}^2 = 2d.FS,$$

donc FS est constant. Ainsi, *le lieu des projections de* F *sur les rayons du complexe* Γ_p *est un plan* σ *perpendiculaire à* h *en* S.

En resumé, *les complexes* Γ_h *et* Γ_e *sont constitués par les perpendiculaires élevées en un point quelconque* E *d'une sphère fixe* O *sur la droite joignant ce point à un point fixe* F (ou à son symétrique F′ par rapport au centre de la sphère). *Le complexe* Γ_p *comprend les perpendiculaires élevées en un point quelconque* E *d'un plan fixe* σ *sur la droite joignant* E *à un point fixe* F.

Cet énoncé rappelle une génération tangentielle des coniques. On pourrait dire que Γ_h et Γ_e sont les *complexes antipodaires* de

F ou F′ par rapport à la sphère O, et que Γ_p est le complexe antipodaire de F par rapport au plan σ.

Le complexe antipodaire d'une sphère par rapport à l'un de ses points est le complexe étudié par M. Corin (*Mathesis;* 1904, p. 177).

Les complexes Γ_e, Γ_h sont déterminés, quand on se donne la sphère (O, a) et les points F, F′ symétriques par rapport à O; pour U et V on peut prendre deux points quelconques qui divisent la distance FF′ harmoniquement, car les relations (5) et (6) ou (5′) et (6′) déterminent p et q si l'on connaît a et c avec d ou avec le rapport $p:q$.

De même, étant donnés le plan σ et le point F, le complexe Γ_p est déterminé; pour U et V on peut adopter deux points quelconques de la droite FS symétriques par rapport à F.

4. Etudions spécialement le complexe Γ_e (fig. 4).

Soit γ la circonférence suivant laquelle un plan λ mené par

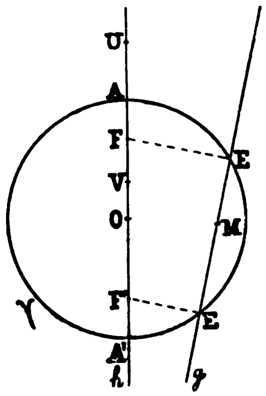


Fig. 4

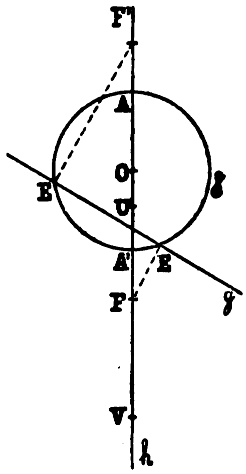


Fig. 5

l'axe h coupe la sphère O. On obtient les droites du complexe contenues dans le plan λ en menant en un point quelconque E de γ une perpendiculaire à FE; donc ces droites enveloppent une ellipse ε qui a pous foyers F, F′ et pour grand axe AA′. Autrement dit, *les courbes méridiennes du complexe sont des ellipses de*

foyers F, F′ *et de sommets* A, A′; elles appartiennent à un ellipsoide de révolution que nous désignerons par η.

Les rayons du complexe qui passent par un même point E de la sphère O forment deux faisceaux situés l'un dans un plan perpendiculaire à FE, l'autre dans un plan perperdiculaire à F′E. C'est pourquoi les points de la sphère sont dits *singuliers*. Les plans de ces faisceaux ont pour enveloppe l'ellipsoïde η.

Le plan tangent à l'ellipsoïde η en un point M de EE′ comprend deux faisceaux de rayons appartenant au complexe et ayant pour centres les points E, E′; pour cette raison ce plan est appelé un *plan singulier* du complexe.

Les deux faisceaux de rayons du complexe qui ont pour centre le point F, ont un rayon commun, perpendiculaire au plan AEA′; les rayons de cette espèce sont tangents à la sphère O. La droite EE′ est un rayon commun à deux faisceaux du complexe contenu dans un même plan; les rayons de cette espèce sont tangents aux méridiennes de η.

Les rayons du complexe qui passent par un même point donné P s'appuient sur la circonférence suivant laquelle la sphère O est coupée par la sphère de diamètre FP (ou de diamètre F′P); on en conclut qu'ils engendrent un cône du second ordre. Cependant, lorsque P est sur l'ellipsoïde (par exemple en M), les sphères de diamètre FP ou F′P touchent η (en E ou E′) et l'on trouve un rayon unique du complexe passant par P; lorsque P est intérieur à η, il n'y a pas le rayon réel passant par P. En A ou A′ le cône du complexe est formé par un seul faisceau de rayons perpendiculaires à l'axe *h*.

Les rayons du complexe qui sont parallèles à une droite donnée *m*, s'appuient sur la circonférence suivant laquelle la sphère O est coupée par le plan mené en F perpendiculairement à *m*; ils appartiennent donc à un cylindre de révolution.

Les cônes du complexe qui ont pour centre F ou F′, sont des *cônes isotropes*.

Soit g une droite du complexe située dans un plan donné μ qui coupe la sphère O suivant une circonférence δ. Projetons les points F, F′ en F_1, F'_1 sur le plan μ et en E, E′ sur la droite g; les points E, E′ appartiennent à δ et les droites F_1 E, F'_1 E′ sont encore perpendiculaires à g. Il résulte de là que la courbe du complexe contenue dans le plan μ est une ellipse de foyers F_1, F'_1. Lorsque μ touche la sphère O en un point E, il ne con

tient qu'un seul rayon réel qui est perpendiculaire au plan EFF'; lorsque μ ne rencontre pas la sphère, il ne contient plus de rayon réel.

Les courbes méridiennes du complexe Γ_h sont des hyperboles ayant pour foyers F, F' et pour sommets A, A' (fig. 5). Le lecteur adaptera facilement à ce complexe les résultats obtenus ci-dessus pour Γ_e. Nous nous contentons de faire remarquer que les asymptotes des hyperboles méridiennes font partie du complexe et que chacune d'elles est le seul rayon ayant la même direction.

5. Passons au complexe Γ_p.

On voit facilement que les courbes méridiennes sont des paraboles de foyer F et de sommet S.

Toute droite du plan σ appartient au complexe; c'est pourquoi on appelle σ un *plan principal*.

Les droites du complexe qui passent par un point E de σ forment deux faisceaux qui sont situées l'un dans le plan σ, l'autre dans le plan perpendiculaire à FE en E. Les points de σ sont donc des points singuliers du complexe.

Les rayons du complexe qui passent par un même point P, s'appuient sur la circonférence suivant laquelle le plan σ coupe la sphère de diamètre FP; ils forment donc un cône du second ordre. Si P appartient à une parabole méridienne, le cône se réduit à la tangente à cette parabole en P; si P est intérieur au paraboloïde lieu de la parabole méridienne, le cône est imaginaire.

Les rayons des complexe qui sont parallèles à une droite donnée *m*, s'appuient sur la droite suivant laquelle le plan σ recontre le plan mené par F et perpendiculaire à *m;* ces rayons sont donc situés dans un même plan. Quant aux rayons parallèles ou perpendiculaires à FG, les premiers sont rejetés à l'infini et les seconds sont les droites de σ.

Le complexe $\frac{u}{p} \pm \frac{v}{q} = \pm 1$

6. Comme u et v sont des fonctions irrationnelles des coordonnées de g, il faut ranger dans un même complexe les droites

qui vérifient l'une des égalités

$$\frac{u}{p}+\frac{v}{q}=1, \quad \frac{u}{p}-\frac{v}{q}=1, \quad \frac{v}{q}-\frac{u}{p}=1.$$

Considérons d'abord les droites g situées dans un même plan méridien λ (fig. 6). Soient F, F' les points qui divisent le segment UV additivement et soustractivement dans le rapport $p:q$; appelons f, f' leurs distances à g et soumettons u, v, f, f' à la règle des signes. Alors

$$f=\frac{pv+qu}{p+q}, \quad f'=\frac{pv-qu}{p-q};$$

l'un des numérateurs, en vertu de la définition du complexe, est égal à $+1$ ou -1. Donc si $p<q$ et que l'on fasse

$$r=\frac{pq}{p+q}, \quad r'=\frac{pq}{q-p},$$

on voit que *les droites* g *du plan* λ *sont tangentes à l'une des circonférences* (F, r), (F', r').

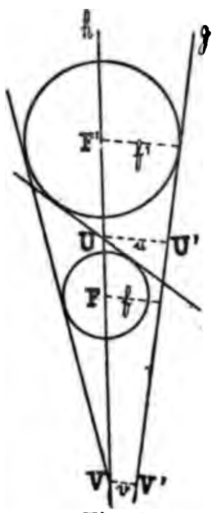


Fig. 6

Les tangentes communes à ces deux circonférences passent par V ou par U et correspondent à $v=0$, $u=p$ ou à $u=0$, $v=p$.

Les points de l'axe h sont des *points singuliers* du complexe; car les droites g menées par un point P de h sont les génératrices des deux cônes circonscrits aux sphères (F, r), (F', r') et ayant pour sommet le point P. Ces cônes coïncident lorsque P est en U ou en V; l'un d'eux se transforme en un faisceau de rayons perpendiculaires à h lorsque P est à l'intersection de h avec l'une des sphères.

Les plans méridiens sont des *plans singuliers* du complexe, parce que la courbe correspondante se décompose en deux circonférences.

7. Considérons maintenant les droites g perpendiculaires à un plan quelconque μ (fig. 7). Soient U_1, V_1 les projections de

U, V sur le plan, E le point de recontre d'une droite g avec μ. Comme $EU_1 = U'U$, $EV_1 = V'V$, on a

$$\frac{EU_1}{p} \pm \frac{EV_1}{q} = \pm 1 .$$

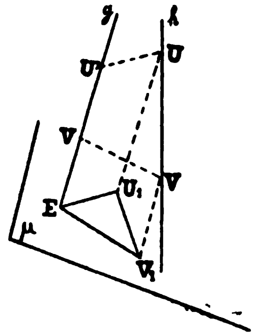


Fig. 7

Par conséquent, *les rayons du complexe parallèles à une même droite appartiennent à un cylindre ayant pour section droite un ovale de Descartes.*

8. Si la droite g est située dans le plan μ, les droites $U_1 U'$, $V_1 V'$ sont perpendiculaires à g; par suite, en posant

$$UU_1 = m, \quad VV_1 = n, \quad U_1U' = n', \quad V_1V' = v',$$

on a

$$\frac{\sqrt{m^2 + u'^2}}{p} \pm \frac{\sqrt{n^2 + v'^2}}{q} = 1 ,$$

ce qui conduit à une équation du quatrième degré en u' et v'.

9. Pour les droites g qui passent par un point donné P on peut écrire

$$\frac{UP \sin (UP, g)}{p} \pm \frac{VP \sin (VP, g)}{q} = \pm 1.$$

La droite variable g forme alors avec les droites UP, VP un trièdre satisfaisant à une relation de la forme

$$p' \sin (UP, g) \pm q' \sin (VP, g) = \pm 1 ;$$

cette égalité se traduit par une équation du quatrième ordre entre les cosinus directeurs de g.

10. L'hypothèse $p = q$ introduit quelques changements intéressants.

Puisque $u \pm v = \pm p$, les droites g situées dans un plan méri-

dien λ touchent la circonférence décrite du milieu de UV comme centre avec le rayon $\frac{1}{2}p$ ou bien elles sont parallèlles à l'une ou l'autre des tangentes menées de U à cette circonférence.

Les droites du complexe perpendiculaires à un plan quelconque μ rencontrent ce plan aux poins d'une ellipse, d'une hyperbole ou de la droite joignant les projections U_1, V_1 de U, V sur μ, suivant que le rapport $U_1 V_1 : p$ est inférieur, supérieur ou égal à l'unité.

Le complexe $uv = b^2$

11. Considérons les droites du complexe situées dans un même plan méridien λ.

Celles de ces droites qui ne passent pas entre les points U et V, enveloppent une ellipse ε qui a pour foyers U, V et pour petit axe $2b$. Celles qui passent entre U et V, enveloppent une hyperbole η qui a les mêmes foyers U, V et pour axe imaginaire $2b$. Pour que ces dernières droites existent, on doit avoir $2b > UV$; si $2b = UV$, la perpendiculaire au milieu de UV est la seule droite g qui coupe le segment UV.

Les plans méridiens sont des plans singuliers du complexe.

Le points de l'axe h sont des points singuliers du complexe: les cônes du complexe qui ont pour sommet un point de h sont constitués par deux cônes de révolution circonscrits à l'ellipsoïde ou à l'hyperboloïde engendrés par ε ou η tournant autour de h.

Les cônes isotropes de sommet U ou V appartiennent au complexe.

12. Soient U_1, V_1 les projections des points U, V sur un plan quelconque μ, et g une droite du complexe perpendiculaire à μ au point E. On a évidemment

$$U_1 E . V_1 E = b^2;$$

il résulte de là que les cylindres du complexe ont pour section droite une ellipse de Cassini, qui devient une lemniscate de Bernoulli lorsque $2b = U_1 V_1$.

13. Pour les droites g situées dans le plan μ, on a, avec les notations du § 8,

$$(m^2+u'^2)(n^2+v'^2)=b^4, \tag{7}$$

équation du quatrième ordre dont il serait intéressant de poursuivre l'étude. Je me bornerai ici à donner la construction du point de contact de g avec son enveloppe en m'appuyant sur le lemme suivant (Voir *Nouvelle Correspondence mathématique*, 1880, p. 597):

Si une droite g *se meut dans un plan de manière que ses distances* $AA'=\alpha$, $BB'=\beta$ *à deux points fixes* A, B *vérifient la relation* $f(\alpha,\beta)=0$, *le point de contact* M *de* g *avec son son enveloppe satisfait à l'égalité*

$$\frac{MA'}{MB'}=\frac{d\alpha}{d\beta}=-\frac{f'\alpha}{f'\beta}, \tag{8}$$

où il faut avoir égard à la règle des signes.

En effet, soit g' une position de la droite mobile infiniment voisine de g; si AA', BB' rencontrent g' en A'_1, B'_1, les segments $A'A'_1$, $B'B'_1$ représentent les accroissements de α et β pourvu qu'on néglige des infiniment petits d'ordre supérieur. N' étant le point de rencontre de $A'B'$ avec $A'_1B'_1$, on a en grandeur et en signe

$$\frac{NA'}{NB'}=\frac{A'A'_1}{B'B'_1},$$

d'où, en passant à la limite, la relation (8).

Cela posé, on tire de (7)

$$\frac{u'du'}{m^2+u'^2}+\frac{v'dv'}{n^2+v'^2}=0, \quad \text{ou} \quad \frac{u'du'}{u^2}+\frac{v'dv'}{v^2}=0.$$

Or, si les perpendiculaires élevées en U sur UV' dans le plan UV_1V' et en V sur VV' dans le plan VV_1V' vont rencontrer respectivement U_1U' en U_2 et V_1V' en V_2, on a: $u^2=u'.U'U_2$, $v^2=v'.V'V_2$, de sorte que

$$\frac{du'}{dv'}=-\frac{U'U_2}{V'V_2}.$$

Par conséquent, le point de contact de $U'V'$ avec son enveloppe et la droite U_2V_2 partagent le segment $U'V'$ harmoniquement.

14. Pour les droites g passant par un même point P, on a

$$\sin(PU, g)\sin(PV, g) = \frac{b^2}{PU.PV},$$

ce qui conduit à une équation du quatrième degré entre les cosinus directeurs de g.

Comme on doit avoir $PU.PV >$ ou $= b^2$, il faut que le point P soit exterieur au solide de révolution qui a pour courbe méridienne la cassinienne $UP.UV = b^2$.

Le complexe $u^2 = 2pv$

15. Nous étudions d'abord l'enveloppe des droites g situées dans un même plan méridien λ.

On trouve facilement l'équation de la podaire de U ou V par rapport à cette enveloppe. Car si $UV = d$, *angle* $U'UV = \omega$, on a $u - v = d\cos\omega$. Par conséquent l'équation de la courbe (U') est

$$u^2 = 2p(u - d\cos\omega), \quad \text{ou} \quad u^2 - 2pu + 2pd\cos\omega = 0,$$

et celle de V':

$$(v + d\cos\omega)^2 = 2pv, \quad \text{ou} \quad v^2 - 2v(p - d\cos\omega) + d^2\cos\omega^2 = 0,$$

suivant que l'origine est en U ou en V. En coordonnées rectangulaires on a, respectivement,

$$(x^2 + y^2)^3 = 4p^2(x^2 + y^2 - dx)^2,$$
$$(x^2 + y^2 + dx)^4 = 4p^2(x^2 + y^2)^3.$$

Soit M le point de contact de $U'V'$ avec son enveloppe; on a

$$\frac{MU'}{MV'} = \frac{du}{dv} = \frac{p}{u} = \frac{\frac{1}{2}u}{v}. \qquad (9)$$

On en conclut que M est à l'intersection de U'V' avec la droite joignant V au milieu de UU' ou joignant U au symétrique de V' par rapport à V.

La droite UV correspond à $u=0$, $v=0$; elle touche la courbe méridienne en V, car l'égalité (9) donne maintenant

$$\frac{MU}{MV}=\frac{p}{o}, \quad \text{d'où} \quad MV=0.$$

UV étant un axe de symétrie de la méridienne, cette droite est à considérer comme une tangente double.

Une solution de $u^2=2pv$ étant $u=v=2p$, les tangentes communes aux cercles $(U, 2p)$. $(V, 2p)$ font partie du complexe; les tangentes communes extérieures sont parallèles à UV, les deux autres (qui peuvent être imaginaires) passent au milieu O de UV. Les asymptotes de la méridienne correspondent à $u=2v=p$, c'est ce qui résulte de la relation (9).

16. Considérons ensuite les droites g perpendiculaires à un plan méridien λ (fig. 8).

Si E_1 est le point de rencontre d'un rayon g du complexe avec ce plan, on a

$$\overline{UE_1}^2=2p.VE_1, \qquad (10)$$

équation du quatrième ordre en coordonnées rectangulaires. Posons $VE_1=\rho$, *angle* $E_1VU=\omega$; l'équation (10) prendra la forme

$$\rho^2-2\rho(d\cos\omega+p)+d^2=0.$$

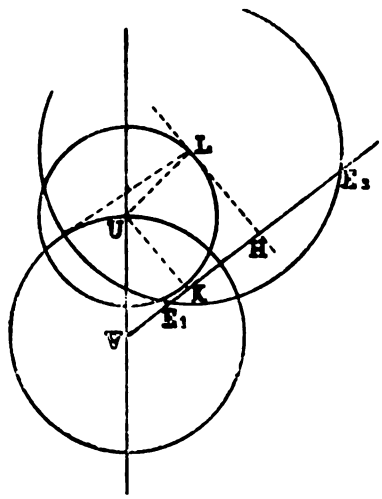


Fig. 8

Représentons par ρ_1 et ρ_2 les deux racines de cette équation; soient E_1 et E_2 les deux points correspondants, H le milieu du

segment E_1E_2; nous aurons

$$\rho_1\rho_2 = d^2, \quad \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) = d\cos\omega + p,$$

ou

$$VE_1 . VE_2 = d^2, \quad VH = d\cos\omega + p.$$

La première égalité montre que la courbe (E), base d'un cylindre du complexe perpendiculaire à λ, est une anallagmatique par rapport au cercle (V, d). Si l'on projette U en K sur VE_1, on a $VK_1 = d\cos\omega$, et le point K est sur la circonférence de diamètre UV. Comme $KH = p$, le lieu de H est un *limaçon de Pascal.* La perpendiculaire en H sur VH est tangente à la circonférence (U, p) en un point L; la circonférence décrite du centre L et orthogonale à la circonférence (V, d) passe par les points E_1, E_2.

Il résulte de là que *la courbe* (E) *est l'enveloppe d'une circonférence qui coupe orthogonalement la circonférence* (V, d) *et dont le centre parcourt la circonférence* (U, p).

Les droites du complexe perpendiculaires à un plan quelconque μ admettent des conclusions analogues, sauf à remplacer U et V par leurs projections U_1, V_1 sur μ.

17. Pour les droites g situées dans un même plan μ, on a, avec les notations du § 8,

$$(m^2 + u'^2)^2 = 4p^2(n^2 + v'^2).$$

Elles ont pour enveloppe une courbe de la 4e classe.

Enfin, les droites g qui passent par un point donné P vérifient une relation de la forme

$$\sin^2(UP, g) = p' \sin(VP, g).$$

GLI AGGRUPPAMENTI PROSPETTIVI DI ORDINE n E SPECIE $p+1$

DI

G. Lazzeri

(Prof. nella R. Accademia Navale di Livorno)

Gli aggruppamenti prospettivi, di cui studio le proprietà fondamentali in questa nota, sono un caso particolare notevole degli aggruppamenti proiettivi, studiati ampiamente dal De Paolis nella sua bella memoria premiata dalla R. Accademia dei Lincei.

Chi già conosce la citata memoria del De Paolis, dal § 11 della presente nota può dedurre immediatamente una conseguenza importante, che cioè tutti gli aggruppamenti proiettivi del 3° e 4° ordine sono o possono ridursi prospettivi, ma lo stesso non accade per quelli di ordine superiore al 4°.

1. Definizione. — Essendo $f_1, f_2 \dots f_n$, (B) n rette ed uno spazio $[p]$ di uno spazio $[n+p]$, tali che due qualunque di essi non abbiano un punto comune, si chiama aggruppamento prospettivo di ordine n e specie $p+1$ l'insieme dei gruppi G_n di n punti che si ottengono come intersezioni delle n rette $f_1, f_2 \dots f_n$ con gli $[n+p-1]$ che contengono (B). Questo spazio (B) si dice *base* dell'aggruppamento [1].

Indicheremo un tale aggruppamento col simbolo $(A_{p+1})_n$ od anche $(A_B)_n$.

---

[1] Veggasi Lazzeri, *Gli aggruppamenti prospettivi e proiettivi del 2°, 3° e 4° ordine. — Periodico di matematica,* tomo XVI, pag. 225.

Dalla definizione stabilita risulta:

1) Un gruppo $G_{n-1}(P_1, P_2, \dots P_{i-1}, P_{i+1} \dots P_n)$ di $n-1$ punti scelti ad arbitrio sulle rette $f_1, f_2, \dots f_{i-1}, f_{i+1} \dots f_n$ individua (in generale) uno ed un solo punto P_i di f_i, che forma con essi un gruppo G_n dell'aggruppamento $(A_{p+1})_n$. Il punto P_i si dice polo del gruppo G_{n-1} rispetto all' $(A_{p+1})_n$.

Infatti gli $(n-1)$ punti $P_1, P_2 \dots P_{i-1}, P_{i+1} \dots P_n$ e la base (B) individuano un $[n+p-1]$ che taglia f_i in un punto P_i.

2) Un gruppo $G_k\ (P_{i_1}\ P_{i_2} \dots P_{i_k})$ di k punti scelti ad arbitrio sulle k rette $f_{i_1}, f_{i_2} \dots f_{i_k}$ individua sulle rimanenti rette un aggruppamento $(A_{p+k+1})_{n-k}$ di ordine $n-k$ e specie $p+k+1$, tutti i gruppi G_{n-k} del quale formano con i medesimi un gruppo G_n dell' $(A_{p+1})_n$.

In particolare per $k=n-2$ si ha:

3) Le coppie di punti P_i, P_h su due rette f_i, f_h, che con $n-2$ punti dati ad arbitrio sulle rimanenti rette, costituiscono un aggruppamento $(A_{n+p-1})_2$, ossia sono le coppie di punti corrispondenti in una proiettività ordinaria.

4) I gruppi di un $(A_{p+1})_n$ sono ∞^{n-1}.

Infatti ogni gruppo è individuale da $n-1$ punti scelti ad arbitrio su altrettante rette.

5) Gli aggruppamenti prospettivi di specie p sopra n rette date ad arbitrio in un $[n+p]$ sono ∞^ν, essendo $\nu \leqq n(p+1)-1$.

Infatti un $(A_{p+1})_n$ è interamente determinato, quando oltre alle n rette è data la base (B). Siccome un $[a]$ in un $[m]$ è individuata da $(a+1)(m-a)$ condizioni, casi il $[p]$ base è individuato da $[p+1]n$ condizioni.

2. Se $p=o$, cioè se la base (B) si riduce ad un punto, l'aggruppamento è di 1ª specie $(A_1)_n$.

Se manca la base (B) l'aggruppamento diventa di specie o. Esso è allora formato dai gruppi di punti in cui n rette $f_1, f_2 \dots f_n$ appartenenti ad un $[n-1]$ sono tagliati dagli $[n-2]$ di questo. Su n rette appartenenti ad un $[n-1]$ esiste un solo $(A_0)_n$.

3. Definizione. — Un gruppo $G_k(P_{i_1}, P_{i_2} \dots P_{i_k})$ di k punti presi su altrettante rette $f_{i_1}, f_{i_2} \dots f_{i_k}$ si dice *apolare*, se forma un gruppo G_n dell' $(A_{p+1})_n$ con qualunque gruppo

$G_{n-k}(P_{i_{k+1}}\ P_{i_{k+2}}\dots P_{i_n})$ di $n-k$ punti presi sulle rimanenti rette; cioè se appartiene agli aggruppamenti polari di tutti i possibili gruppi G_{n-k} presi sulle rimanenti rette.

4. Teorema. — Esistono gruppi G_k apolari rispetto ad un $(A_{p+1})_n$, purchè sia $k>\frac{n}{2}$.

Si possono ottenere gruppi apolari soltanto nei due seguenti casi:

1) Per la base (B) e per s rette $f_{i_1}\,f_{i_2}\dots f_{i_s}$ passa un $[p+2s]$ che è contenuto nell' $[n+p]$ dato, se $2s<n$.

Poniamo $n-1-2s=f$. Allora il $[p+2s]$ è un $[p+n-1]$, se $f=o$, o è base di un sistema di $\infty^f[p+n-1]$, se $f>o$. Ciascuno di questi $[p+n-1]$ taglia le rette $f_{i_{s+1}}, f_{i_{s+2}}\dots f_{i_n}$ in un gruppo di punti $G_{n-s}(P_{i_{s+1}}\ P_{i_{s+2}}\dots P_{i_n})$ che è apolare, perchè forma un gruppo G_n dell' $(A_{p+1})_n$ con qualsiasi gruppo G_s delle $f_{i_1}\,f_{i_2}\dots f_{i_s}$.

Affinchè un tale gruppo G_{n-s} si possa trovare è dunque necessario e sufficiente che sia $f\geqq o$, ossia

$$s\leqq\frac{n-1}{2},$$

e quindi $k=n-s\geqq\frac{n+1}{2}$,

od anche

$$k>\frac{n}{2}.$$

2) Se un $[n+p-s-1]$ contiene la base (B), e incontra $(n-s)$ rette $f_{i_{s+1}}\,f_{i_{s+2}}\dots f_{i_n}$ in altrettanti punti $P_{i_{s+1}}, P_{i_{s+2}}\dots P_{i_n}$, questi costituiscono un gruppo G_{n-s} apolare. Infatti per questo $[n+p-s-1]$ e per s punti arbitrari $P_{i_1}.\ P_{i_2}\dots P_{i_s}$ delle $f_{i_1}, f_{i_2}\dots f_{i_s}$ passa un $[n+p-1]$, che contiene anche $P_{i_{s+1}}\dots P_{i_n}$; dunque il gruppo G_{n-s} forma un gruppo G_n con ogni gruppo G_s delle rimanenti rette, ossia G_{n-s} è apolare rispetto ad $(A_{p+1})_n$.

Esaminiamo se ed in quali casi si possono determinare $[n+p-1]$ che verificano le condizioni imposte precedentemente.

È noto (1) che il numero di condizioni da verificarsi perchè un $[a]$ ed un $[b]$ appartenenti ad un $[m]$ abbiano un $[c]$ comune solamente è

$$(1) \qquad z=(c+1)(m+c-a-b).$$

Ponendo $m=n+p$, $a=n+p-s-1$, $b=1$, $c=o$, si ricava che il numero di condizioni perchè un $[n+p-s-1]$ ed una retta dell' $[n+p]$ abbiano un punto comune, è

$$z=(n+p)-(n+p-s-1)-1=s,$$

e quindi il numero di condizioni perchè un $[n+p-s-1]$ incontri $(n-s)$ rette in altrettanti punti è

$$s(n-s).$$

È pure noto che il numero di condizioni necessarie perchè l' $[n+p-s-1]$ dell' $[n+p]$ contenga un punto è $(s+1)$, e quello delle condizioni perchè l' $[n+p-s-1]$ contenga la base (B) (ossia $p+1$ dei suoi punti) è

$$(p+1)(s+1).$$

Riassumendo, l' $[n+p-s-1]$ deve verificare in tutto

$$f=s(n-s)+(p+1)(s+1)$$

condizioni.

Ora il numero di condizioni che serve a determinare un $[a]$ in $[m]$ (come si vede ponendo nella (1) $a=b=c$) è

$$u=(a+1)(m-a)$$

(1) Veggasi per es. Schubert, *Fundamentale Anzahlen bei* n *Dimensionen*. — *Mathematische Annalen*, Bd. XXVI, s. 29.

e quindi per l' $[n+p-s-1]$ nell' $[n+p]$

$$u=(n+p-s)(s+1).$$

Si potrà dunque determinare un $[n+p-s-1]$ che verifichi le condizioni poste, se

$$u \geqq f.$$

Siccome

$$\begin{aligned} u-f &= (n+p-s)(s+1)-s(n-s)-(p+1)(s+1) \\ &= (s+1)(n-s-1)-s(n-s) \\ &= (n-s)-(s+1)=n-2s-1, \end{aligned}$$

si ricava

$$s \leq \frac{n-1}{2},$$

e quindi

$$k=n-s>\frac{n}{2}.$$

Corollari. — 1°) Se n è dispari, sopra $\frac{n+1}{2}$ rette $f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_{\frac{n+1}{2}}}$ esistono due soli gruppi apolari.

2°) Se n è pari, sopra $\frac{n}{2}+1$ rette $f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_{\frac{n}{2}+1}}$ esistono due sistemi ∞^1 di gruppi apolari.

3°) Ogni gruppo G_s, che contiene un gruppo G_k apolare, è pure apolare.

5. Esaminiano più particolarmente la posizione dei gruppi apolari, studiati nel § precedente distinguendo il caso di n dispari da quella di n pari.

1) *n dispari*

Chiamiamo $\pi_{i_1 i_2 \dots i_{\frac{n-1}{2}}}$ il $[p+n-1]$ che contiene (B) e $f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_{\frac{n-1}{2}}}$; $\sigma_{i_1 i_2 \dots i_{\frac{n+1}{2}}}$ lo spazio $\left[p+\frac{n-1}{2}\right]$ comune agli

$\frac{n+1}{2}$, π, i cui indici si ottengono sopprimendo via via uno di quelli di σ; $\lambda_{i_1}\left(i_2 \dots i_{\frac{n+1}{2}}\right)$ la spazio $\left[p+\frac{n+1}{2}\right]$ comune a tutti gli spazi π i cui indici si ottengono dal gruppo $i_1\, i_2 \dots i_{\frac{n+1}{2}}$ sopprimendo successivamente $i_2, i_3, \dots i_{\frac{n+1}{2}}$.

La f_{i_1} ([1]) essendo contenuta in tutti i π che passano per $\lambda_{i_1}\left(i_2 \dots i_{\frac{n+1}{2}}\right)$, è pure contenuta in questa. Similmente $\sigma_{i_1\, i_2 \dots i_{\frac{n+1}{2}}}$ è contenuta nella stessa $\lambda_{i_1}\left(i_2 \dots i_{\frac{n+1}{2}}\right)$. Perciò questo σ e f_{i_1} hanno un punto comune

$$P_{i_1}\left(i_2 \dots i_{\frac{n+1}{2}}\right) = f_{i_1}\, \sigma_{i_1 i_2 \dots i_{\frac{n+1}{2}}}$$

Così ogni piano $\sigma_{i_1\, i_2 \dots i_{\frac{n+1}{2}}}$ taglia le rette $f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_{\frac{n+1}{2}}}$ in un gruppo $G_{\frac{n+1}{2}}$ di punti

$$P_{i_1}\left(i_2\, i_3 \dots i_{\frac{n+1}{2}}\right) P_{i_2}\left(i_1\, i_3 \dots i_{\frac{n+1}{2}}\right) \dots P_{i_{\frac{n+1}{2}}}\left(i_1\, i_2 \dots i_{\frac{n-1}{2}}\right),$$

che è apolare.

Inoltre $\pi_{i_{\frac{n+3}{2}} \dots i_n}$ contiene $\sigma_{i_1\, i_{\frac{n+3}{2}} \dots i_n}$, e quindi $P_{i_1}\left(i_{\frac{n+3}{2}} \dots i_n\right)$ ne segue che anche

$$P_{i_1}\left(i_{\frac{n+3}{2}} \dots i_n\right),\ P_{i_2}\left(i_{\frac{n+3}{2}} \dots i_n\right) \dots P_{i_{\frac{n+1}{2}}}\left(i_{\frac{n+3}{2}} \dots i_n\right)$$

è un gruppo apolare.

Dunque

Sopra ogni retta f_{i_1} esistono $\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} = \dfrac{|\underline{n-1}}{\left(|\underline{\frac{n-1}{2}}\right)^2}$ punti

$P_{i_1\left(i_2 \dots i_{\frac{n+1}{2}}\right)}$, e quindi sulle n rette si hanno in tutto $n\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} = \frac{|\underline{n}}{\left(|\underline{\frac{n-1}{2}}\right)^2}$ punti, che combinati opportunamente danno origine a $2\binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \frac{4|\underline{n}}{(n+1)\left(|\underline{\frac{n-1}{2}}\right)^2}$ gruppi $G_{\frac{n+1}{2}}$ apolari (due per ogni gruppo di $\frac{n+1}{2}$ rette).

2) *n pari*

Un punto qualunque P_{i_1} della retta f_{i_1} determina un aggruppamento $(A_{p+2})_{n-1}$ polare di P_{i_1} rispetto al dato $(A_{p+1})_n$. Essendo $n-1$ dispari, sopra $\frac{n}{2}$ rette $f_{i_2} f_{i_3} \dots f_{i_{\frac{n}{2}+1}}$ esistono due gruppi apolari $G_{\frac{n}{2}}$, $G'_{\frac{n}{2}}$ per l' $(A_{p+2})_{n-1}$ determiato da P_{i_1}. Allora anche i due gruppi $\left(P_{i_1} G_{\frac{n}{2}}\right)$, $\left(P_{i_2} G'_{\frac{n}{2}}\right)$ sono apolari per l' $(A_{p+2})_n$ dato.

Se P_{i_1} percorre la f_{i_1} si hanno in tal guisa due sistemi di ∞' gruppi apolari per l' $(A_{p+1})_n$.

6. Illustriamo con qualche esempio ciò che è stato detto nel § precedente.

1) Sia $n=3$, $p=0$. L'aggruppamento $(A_1)_3$ è formato dalle terne di punti d'intersezione di tre rette f_1, f_2, f_3 nello spazio ordinario (sghembe due a due) coi piani di una stella, il cui centro (B) non giace sopra alcuna delle rette suddette.

In questo caso si hann tre piani $\pi_i = Bf_i$ $(i, h, k = 1, 2, 3)$ tre rette $\sigma_{ik} = \pi_i \pi_h$ per B che incontrano f_i, f_h, e sei punti $P_{i(k)} = f_i \sigma_{ik}$. Questi sei punti danno origine ai seguenti gruppi apolari

$$P_{(3)2}\, P_{(2)3}\,; \quad P_{2(1)}\, P_{3(1)}$$
$$P_{(1)3}\, P_{(3)1}\,; \quad P_{3(2)}\, P_{1(2)}$$
$$P_{(2)1}\, P_{(1)2}\,; \quad P_{1(3)}\, P_{2(3)}.$$

2) Sia $n=4$, $p=-1$. L'aggruppamento $(A_0)_3$ è formato dai gruppi G_4 di punti d'intersezione di quattro rette $f_1\, f_2\, f_3\, f_4$ dello spazio ordinario, sghembe due a due, coi piani del medesino.

Un punto P_i di f_i determina un aggruppamento $(A_1)_3{}^{P_i}$ polare sulle rette f_h, f_k, f_l $(i, h, k, l = 1, 2, 3, 4)$, e quindi due coppie apolari su f_h, f_k. Facendo scorrere P_i sulle f_i otteniamo due sistemi di ∞' terne apolari su $f_i\, f_h\, f_k$.

3) Sia $n=5$, $p=0$. Abbiamo così un $(A_1)_5$ su cinque rette dello spazio [5] formato dai gruppi che si ottengono secando cinque rette f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 coi [4] che passano per un punto B (base).

In questo caso si hanno $\binom{5}{2}=10$ spazi [4], $\pi_{ih}=B\,f_i\,f_h$ $(i, h, k, l, m = 1, 2, 3, 4, 5)$, $\binom{5}{3}=10$ spazi [2] $\sigma_{ikh}=\pi_{hk}\,\pi_{ki}\,\pi_{ih}$, e 30 punti $P_{i(hk)}$, che dànno origine a 20 terne apolari dei due tipi

$$P_{i(hk)}\; P_{h(ki)}\; P_{k(ih)}\;;\qquad P_{(lm)}\; P_{h(lm)}\; P_{k(lm)}.$$

Ogni punto P appartiene a due terne apolari, per es. $P_{i(hk)}$ appartiene alle due terne

$$P_{i(hk)}\; P_{h(ki)}\; P_{k(ih)}\;;\qquad P_{i(hk)}\; P_{l(hk)}\; P_{m(hk)}.$$

7. Teorema. — *La dimensione p della base (B) di un aggruppamento $(A_{p+1})_n$ deve essere $\leqq n-1$.*

Supponiamo che le n rette $f_1\, f_2 \ldots f_n$, sulle quali è dato un $(A_{p+1})_n$ siano tutte contenute in $[n+p-s]$. Poichè un $[a]$ ed un $[b]$ contenuti in un $[m]$ hanno in comune un $[a+b-m]$ se $a+b\geqq m$, la base (B) incontrerà questa $[n+p-s]$ in un $[p-s]$ e ogni $[n+p-1]$ incontrerà lo stesso $[n+p-s]$ in un $[n+p-s-1]$.

Ne segue che l'aggruppamento dato $(A_{p+1})_n$ potrà anche riguardarsi come formato dai gruppi di punti che si ottengono tagliando le n rette $f_1\, f_2 \ldots f_n$ contenute nell $[n+p-s]$ con gli $[n+p-s-1]$ che hanno un $[p-s]$ comune, ossia è un $(A_{p-s+1})_n$.

Siccome n rette, se sono in posizione generale individuano sempre un $[2n-1]$, così tutti gli aggruppamenti proiettivi di ordine n potranno esser contenuti in uno spazio di cui il numero delle dimensioni è $\leqq 2n-1$ e quindi $p\leqq n-1$.

8. Supponiamo che k rette $f_1, f_2 \ldots f_k$ fra le n rette $f_1 f_2 \ldots f_n$ abbiano una posizione particolare, per la quale insieme con la base (B) sieno contenute in un $[p+k]$. In questo caso sulle rimanenti rette $f_{k+1} \ldots f_n$ resta determinato un aggruppamento $(A_{p+k+1})_{n-k}$, i gruppi del quale sono tutti apolari.

Infatti $n-k-1$ punti scelti su altrettante fra le $n-k$ rette $f_{k+1} \ldots f_n$ individuano col $[p+k]$ sopra indicato un $[n+p-1]$ che determina un punto della retta rimanente. — Resta così determinata sulle $f_{k+1} \ldots f_n$ un aggruppamento $(A_{p+k+1})_{n-k}$ ogni gruppo G_{n-k} del quale insieme con qualsiasi gruppo G_k di punti presi sulle $f_1 \ldots f_k$ forma un gruppo G_n dell' $(A_{p+1})_n$ dato.

Inoltre tutti i $[p+k-1]$ contenenti la base (B) incontrano tutte le $f_1 \ldots f_k$ e determinano su di esse un aggruppamento $(A_{p+1})_k$, i gruppi del quale sono tutti apolari. Infatti $n-k$ punti scelti ad arbitrio sulle $f_{k+1} \ldots f_n$ insieme con uno qualunque dei suddetti $[p+k-1]$ determinano un $[p+n-1]$ contenuto in $[n+p]$ e contenente la base (B). Ciò prova che ogni gruppo G_k dell'aggruppamento $(A_{p-1})_k$ sulle $f_1, f_2 \ldots f_k$ insieme con un gruppo qualsiasi G_{n-k} di punti delle $f_{k+1} \ldots f_n$ costituisce un gruppo G_n dell'aggruppamento $(A_{p+1})_n$. Dunque:

Se k rette $f_1, f_2 \ldots f_k$ e la base (B) di un $(A_{p+1})_n$ sono contenute in un $[p+k]$, l' $(A_{p+1})_n$ è costituito dai gruppi G_k di un $(A_{p+1})_k$ su $f_1 \ldots f_k$ combinati con tutti i possibili gruppi G_{n-k} delle $f_{k+1} \ldots f_n$ e dai gruppi G_{n-k} di un $(A_{n+k+1})_{n-k}$ sulle $f_{k+1} \ldots f_n$ con tutti i possibili gruppi G_k delle $f_1 \ldots f_k$; ossia l' $(A_{p+1})_n$ si spezza in un $(A_{p+1})_k$ sulle $f_1 f_2 \ldots f_k$ e in un $(A_{n+p+1})_{n-k}$ sulle $f_{k+1} \ldots f_n$.

Esempio. — Se $p=0$, $n=3$, $k=2$, e quindi $n-k=1$, abbiano per l' $(A_1)_3$ la seguente proprietà.

Se f_1, f_2, f_3 sono tre rette, due delle quali (f_1, f_2) sono in un piano π ed O è un punto di questo piano, l'aggruppamento prospettivo $(A_1)_3$ che ha per base il punto O si spezza nell' $(A_1)_2$ sulle f_1, f_2 rispetto alla base O e nell' $(A)_1$ che è il punto $f_3\pi$.

9. Nel § precedente abbiamo visto che un aggruppamento prospettivo di ordine n può spezzarsi in due ordine k ed $n-k$. Questi possano alla loro volta spezzarsi, e così di seguito, cosicchè un aggruppamento di ordine n può spezzarsi in s aggruppamenti degli ordini $n_1, n_2 \ldots n_s$, essendo $n_1+n_2+\ldots+n_s=n$.

Un aggruppamento prospettivo di ordine n si dice singolare se si scompone in n aggruppamenti prospettivi del 1° ordine.

É evidente che

1) Un $(A_{p+1})_n$ su n rette $f_1 \dots f_n$ concorrenti in un punto è singolare.

2) Se un aggruppamento prospettivo è singolare, sono singolari tutti gli aggruppamenti polari rispetto ad esso.

10. Dati s aggruppamenti prospettivi $(A_{p+1}{}^{(1)})_n$, $(A_{p+1}{}^{(2)})_n \dots (A_{p+1}{}^{(s)})_n$ di ordine n e specie $p+1$, sulle stesse n rette, aventi rispettivamente per basi gli spazi $(B^{(1)})$, $(B^{(2)}) \dots (B^{(s)})$, è evidente che i gruppi ad essi comuni sono tutti e soli quelli individuati dagli spazi $[n+p-1]$ che contengono tutte queste basi, supposto che esistano.

Supponiamo che queste basi abbiano in comune un $[q]$. Allora essi appartengono ad uno spazio $[sp-(s-1)q]$. Se

$$sp-(s-1)\,q=n+p-1,$$

ossia

$$(s-1)\,(p-q)=n-1,$$

esiste dunque uno ed un solo $[n+p-1]$ che contiene $(B^{(1)})$ $(B^{(2)}) \dots (B^{(3)})$ e quindi un sol gruppo comune agli aggruppamenti dati.

Se

$$(s-1)\,(p-q)<n-1,$$

e si pone

$$(s-1)\,(p-q)+t=n-1,$$

le s basi $(B^{(i)})$ appartengono ad un $[n+p-1-t]$ base di un sistema lineare di $\infty^t\,[n+p-1]$, ognuno dei quali individua un gruppo comune agli s aggruppamenti dati.

Se

$$(s-1)\,(p-q)=n$$

non esistono gruppi comuni.

L'ipotesi $(s-1)(p-q)>n$ è da escludersi poichè tutti i $(B^{(i)})$ appartengono al $[n+p]$.

Esempio. — Se $q=p-1$, si ha $t=n-s$ e quindi abbiamo: Dati s aggruppamenti prospettivi $(A_{p+1}{}^{(1)})_n \ldots (A_{p+1}{}^{(s)})_n$, le cui basi contengono uno stesso $[p-1]$, essi hanno in comune ∞^{n-s} gruppi, se $s>n$; ne hanno un solo se $s=n$.

11. Problema. — Costruire un aggruppamento prospettivo di specie $p+1$ e ordine n che contenga ν gruppi $G_n^{(1)} \ldots G_n^{(\nu)}$ di punti sulle rette $f_1 \ldots f_n$ di un $[n+p]$.

Ogni gruppo $G_n^{(i)}$ individua uno spazio $[n-1]$ che indicherò con π_i. Se esiste uno spazio $[p]$, che indicherò con B, il quale incontri i ν π_i in altrettanti punti, esistono altrettanti spazi $[n+p-1]$ (che chiamerò σ_i) i quali contengono B ed uno dei gruppi $G_n^{(i)}$, e quindi questi gruppi appartengono ad un medesimo $(A_{p+1})_n$ di base (B).

Ora perchè in un $[n+p]$ un $[n-1]$ ed un $[p]$ s'incontrino in uno $[o]$ deve esser verificata *una* condizione; ed un $[p]$ nel $[n+p]$ è individuato da $(p+1)n$ condizioni. Ne segue che si potrà determinare un numero finito di spazi B, soddisfacenti alle condizioni volute, se $\nu=(p+1)n$; se ne potranno determinare ∞ se $\nu<(p+1)n$; non se ne potrà determinare nessuno se $\nu>(p+1)n$.

In particolare, osservando che il massimo valore che può avere p è $n-1$, si vede che si possono far passare un numero finito o infinito di $(A_n)_n$ per ν gruppi se $\nu \leqq n^2$, non se ne può far passare nessuno se $\nu>n^2$ (1).

12. Giova osservare che le considerazioni del § precedente cadono in difetto per $n=2$.

Se $n=2$, e consideriamo due rette f_1, f_2 dello spazio ordinario $[3]$ quattro gruppi $G_2^{(1)}$, $G_2^{(2)}$, $G_2^{(3)}$, $G_2^{(4)}$ individuano quattro rette r_1, r_2, r_3, r_4. Ora esistono due rette che si appoggiano ad esse; ma sono precisamente le f_1, f_2. Non si può dunque

(1) Un aggruppamento proiettivo è individuato da $\nu=2^n-1$ dei suoi gruppi. Per $n \leq 4$ si ha $2^n-1<n^2$, per $n>4$ si ha $2^n-1>n^2$, perciò tutti gli aggruppamenti proiettivi di ordine non superiore a quattro sono prospettivi; ma non tutti quelli di ordine superiore a 4 sono prospettivi.

determinare un $(A_1)_2$ che contenga quattro gruppi dati ad arbitrio.

Presi inveci tre gruppi $G_2^{(1)}$ $G_2^{(2)}$ $G_2^{(3)}$, questi individuano tre rette r_1, r_2, r_3 alle quali si appoggiano le ∞' rette s di una serie rigata. Tutte le rette che incontrano f_1, f_2 e una della s incontrano anche tutte le altre, e quindi ognuna delle s è asse di un fascio di piani che sulle f_1, f_2 determinano la unica proiettività alla quale appartengono i tre gruppi $G_2^{(1)}$, $G_2^{(2)}$, $G_2^{(3)}$.

A OBRA SCIENTIFICA E A VIDA DO CHIMICO PORTUGUEZ ROBERTO DUARTE SILVA

POR

A. J. Ferreira da Silva

(Continuação)

V

Outra serie de trabalhos originaes occuparam o nosso compatriota no periodo de 1878 a 1885, nas poucas e interrompidas horas que lhe sobravam do desempenho das suas funcções officiaes de ensino, que elle desempenhava com um zelo e consciencia inexcediveis: referimo-nos á preparação de diversos hydrocarbonetos aromaticos pelo methodo de synthese dos srs. Friedel e Crafts, baseado no emprego do chloreto de aluminio (1).

O carboneto que primeiro obteve por synthese foi o *cumeno* ou *isopropylbenzina* C^9H^{12}

$$\underbrace{C^6H^5.CH\begin{matrix}<CH^3\\ <CH^3\end{matrix}}_{\text{Isopropylbenzina}}$$

obtido na reacção do chloreto de isopropylo ou do chloreto de

---

(1) Veja-se, a respeito d'este methodo, a exposição feita na nossa *Noticia sobre a vida e os trabalhos scientificos de* Charles Friedel. Coimbra, 1899, pagg. 19-21.

propylo normal sobre a benzina em presença do chloreto de aluminio. **Roberto Silva** observou nas suas experiencias que o ponto de ebulição do carboneto obtido por meio de chloreto de propylo era superior em 2° ao que se preparava por meio do chloreto de isopropylo, e, não obstante ter-lhe sido impossivel encontrar outro caracter differencial entre os dois productos, pensou a principio na existencia de dois cumenos isomeros — um que seria a propylbenzina, outro a isopropylbenzina; mais tarde, porém, reconheceu que os dois productos eram identicos, e que na reacção com o chloreto de propylo havia a transformação do radical propylo em isopropylo, effectuada sob a influenciu do chloreto de aluminio, como fôra demonstrado pouco antes por **Kekulé** e **Schrötter** [1].

A isopropylbenzina é um liquido incolor, muito movel, menos denso do que a agua, de cheiro muito suave; o ponto de ebulição da que procede do chloreto de propylo é 152,5-153,5°, e da que resulta do chloreto de isopropylo, 151-152°.

Indirectamente, e como producto secundario, obtem-se ainda o mesmo hydrocarboneto na acção do chloreto de allylo C^3H^5Cl, do 2,2-dichloropropano $CH^3.CCl^2.CH^3$ (methylchloracetol, ou chloracetol de **Friedel**) e do 2-propyleno chlorado $CH^3.CCl:CH^2$ sobre a benzina em presença do chloreto de aluminio.

Um outro carboneto de grande importancia, porque existe nos oleos essenciaes de muitas plantas, e que se obtem facilmente aquecendo a camphora $C^{10}H^{16}O$ com o anhydrido phosphorico ou com o pentasulfureto do phosphoro, é o *cymeno* $C^{10}H^{14}$, que tambem se pode denominar *para-methylisopropylbenzina* ou isopropyltolueno (1,4-methylmethoethylpheno):

$$\underbrace{C^6H^4<^{CH^3}_{C^3H^7\text{(iso)}}}_{\text{Cymeno } C^{10}H^{14}}.$$

Roberto Duarte Silva preparou-o syntheticamente fazendo reagir o chloreto de isopropylo sobre o tolueno em presença do chloreto de aluminio. É um liquido incolor, muito refringente, de

(1) Veja-se *Bulletin de la Societé chimique de Paris*, 2.º série, t. XXVIII, pag. 529; t. XXIX, pag. 145 e t. XLIII, pagg. 317-318.

cheiro muito parecido com o cymeno da camphora, e fervendo entre 172 e 173° (1).

Obteve tambem dois *diphenylpropanos isomeros* $C^{15}H^{16}$: um é o producto principal da reacção do chloreto de allylo $CH^2{:}CH.CH^2Cl$ e do chloreto de propyleno normal $CH^3.CHCl.CH^2Cl$ sobre a benzina; o outro resulta da acção do *chloracetol de* **Friedel** $CH^3.CCl^2.CH^3$ ou do 2-chloropropyleno (que **Silva** chamava propyleno monochlorado de acetona) $CH^3.CCl{:}CH^2$ sobre a benzina (2):

$$\underbrace{\begin{array}{l} CH^3 \\ | \\ CH.C^6H^5 \\ | \\ CH^2.C^6H^5 \end{array}}_{\substack{\alpha\beta\text{-Diphenylpropano,} \\ \text{derivado do chloreto} \\ \text{de propyleno normal}}} \qquad \underbrace{\begin{array}{l} CH^3 \\ | \\ C{<}\begin{smallmatrix} C^6H^5 \\ C^6H^5 \end{smallmatrix} \\ | \\ CH^3 \end{array}}_{\substack{\text{Diphenylpropano,} \\ \text{derivado do chlora-} \\ \text{cetol}}}$$

O primeiro é um liquido insoluvel na agua, soluvel no alcool, no ether e no sulfureto de carbono, e ferve a 277-279°; o ponto de ebullição correcto, segundo **Krämer** e **Spilker**, é 291-293°; perdendo um grupo phenyleno C^6H^4 gera a isopropylbenzina, a que nos referimos:

$$\underbrace{\begin{array}{l} CH^3 \\ | \\ CH.C^6H^5 \\ | \\ CH^2.C^6H^5 \end{array}}_{\substack{\alpha\beta\text{-Diphenyl-} \\ \text{propano } C^{15}H^{16}}} - C^6H^4 = \underbrace{\begin{array}{l} CH^3 \\ | \\ CH.C^6H^5 \\ | \\ CH^3 \end{array}}_{\substack{\text{Isopropyl-} \\ \text{benzina } C^9H^{12}}}$$

segundo a explicação de **Friedel**.

---

(1) *Bulletin de la Societé chimique de Paris*, 2.ª série, t. XXIX, pag. 193; t. XLIII, pag. 321.

(2) *Bulletin de la Societé chimique de Paris*, 2.ª série, t. XXXIV, pag. 674; t. XLIII, pag. 318; **Wurtz**, *Supplement au Dictionnaire de Chimie*, t. 1.º, pag. 562; e *Congrès d'Alger de l'Association française pour l'avancement des sciences*, 1881, pag. 350.

O segundo, mais conhecido pelo nome de dimethyldiphenylmethano, é liquido e ferve a 281-282° (1).

Na reacção que dá origem a este corpo, quando se emprega o propyleno monochlorado, obtem-se tambem um *cumeno*, de P.E = 155°; é uma *diisopropylbenzina* $C^{12}H^{18}$, que ferve a 202-206°, identica á que se obtem fazendo passar a corrente de chloreto de isopropylo sobre a benzina, addicionada de chloreto de aluminio (2):

$$\underbrace{C^6H^4 < \begin{matrix} CH(CH^3)^2 \\ CH(CH^3)^2. \end{matrix}}_{\text{o-Diisopropylbenzina}}$$

Na ideia de obter um corpo homologo inferior dos anteriores e de ponto de ebulição menos elevado, **Roberto Silva** fez reagir o chloreto d'ethyleno $C^2H^4Cl^2$ sobre a benzina em presença do chloreto de aluminio; e, contra o que esperava, obteve um corpo crystallisavel, de ponto de ebulição quasi tão elevado como o diphenylpropano. O exame cuidadoso da nova substancia mostrou-lhe que assim obtivera o *dibenzylo* $C^{14}H^{14}$, que **Cannizzaro** e **Rossi** tinham preparado na acção do sodio sobre o chloreto de benzylo:

$$\underbrace{\begin{matrix} CH^2.C^6H^5 \\ | \\ CH^2.C^6H^5. \end{matrix}}_{\text{Dibenzylo}}$$

É o *diphenylethano symetrico (Phenylethanphenylo)* (3), cujo ponto de ebulição é 280-285° e o de fusão a 52-53°, e se pode obter dos seus solutos no ether em crystaes prismaticos, pertencentes ao systema orthorhombico (4).

---

(1) *Bulletin de la Société chimique de Paris*, 2.º série, t. XXXI, pag. 2; e *Comptes rendus*, t. LXXXIX, pagg. 606–608.

(2) *Bulletin de la Société chimique de Paris*, 2.º série, t. XXVIII, pag. 529; t. XXXIV, pag. 674; t. XXXV, pag. 289; t. XLIII, pag. 320.

(3) Beilstein, *Handbuch der org. Chemie*, 4º Aufl., t. II. pag. 232.

(4) *Comptes rendus*, t. LXXXIX, pagg. 606–608; *Bulletin de la Société chimique de Paris*, 2.º série, t. XXXVI, pagg. 1 e 24. O ponto de ebulição do dibenzylo é apontado no livro de Berthelot e Jungfleisch, 4º édit., pag. 173, como sendo 284º e o ponto de fusão 52º,5.

É isomero d'este carboneto o *diphenylethano asymetrico (diphenylmethylmethano, a-diphenylethano)*, que elle egualmente obteve por um processo semelhante, mas usando o chloreto d'ethylideno, em vez do chloreto do ethyleno:

$$\underbrace{\begin{matrix} C^6H^5 \\ C^6H^5 \end{matrix}\!\!>CH\,.\,CH^3.}_{\substack{\text{Diphenylethano} \\ \text{asymetrico } C^{14}H^{14}}}$$

Este corpo, que é liquido, ferve a 270° (1), tem cheiro agradavel, é fortemente refringente, tem fluorescencia azul, e o seu peso especifico é elevado; pode solidificar pelo resfriamento por meio d'uma mistura frigorica, e os crystaes fundem á temperatura ordinaria (2).

Mas na reacção que dá origem ao dibenzylo forma-se um pouco de *ethylbenzina*, que passa primeiro á destillação, e que talvez resulte da acção reductora do chloreto de aluminio, descoberta por Friedel e que Roberto Silva tinha apurado em diversos casos; e corpos ainda menos volateis que o dibenzylo, que passam entre 285 e 360°: dois liquidos e um crystalisado, parecendo-se com o triphenylethano o primeiro dos productos liquidos, com um ponto de ebulição de cerca de 340°.

Este ponto de vista, porém, não chegou Roberto Silva a confirma-lo por experiencias e determinações directas.

VI

Os restantes trabalhos originaes de Roberto Duarte Silva são os que realisou em collaboração com o seu dilecto amigo e grande mestre de chimica franceza, Friedel.

Refere-se um dos grupos dessas investigações a diversos compostos em C^3, cujo resultado mais importante foi a synthese total da glycerina.

---

(1) Beilstein, *ob. cit.*, pag. 231. No livro citado de Berthelot e Jungfleisch, pag. 172, vem, por erro typographico, o numero 27.°

(2) As notas de Silva sobre este corpo encontram-se no *Bulletin de la Societé chimique de Paris*, 2.° série, t. XXXVI, pag. 66; e t. XLI, pag. 448.

Reconheceram os dois auctores que na *acção do chloro sobre o chloreto de isopropylo* $C^3H^7Cl = CH^3.CHCl.CH^3$ se obtem *dois chloropropanos* $C^3H^6Cl^2$ *isomeros:* um, em pequena quantidade, é o chloreto de propyleno ordinario ou 1,2-dichloropropano, que é identico ao que resulta da acção directa do chloro sobre o propyleno; outro é um isomero, a que pozeram o nome de *methylchloracetol* ou simplesmente *chloracetol,* que deriva da acetona pela substituição do oxygenio pelo chloro.

$$\underbrace{CH^3.CHCl.CH^3}_{\text{2-Chloropropano}} \rightarrow \underbrace{CH^3.CHCl.CH^2Cl}_{\substack{\text{1,2-Dichloropropano} \\ \text{P.E} = 97°,5 \text{ a } 98°,5}} \text{ e } \underbrace{CH^3.CCl^2.CH^3}_{\substack{\text{2,2-Dichloropropano} \\ \text{(Chloracetol)}}}$$

Eis aqui o primeiro exemplo, conhecido na série gorda, da isomeria de posição, realisada na mesma reacção sobre um corpo unico.

Fazendo, porém, actuar sobre o mesmo chloreto de isopropylo, não o chloro, mas o chloreto de iodo a 100°, obtem-se apenas o chloreto de propyleno, em que os dois atomos de chloro estão ligados a atomos de carbono diversos, isto é, o 1,2-dichloropropano:

$$\underbrace{CH^3.CHCl.CH^3}_{\text{Chloreto de isopropylo}} + \underbrace{ClI}_{\substack{\text{Chloreto} \\ \text{de iodo}}} = \underbrace{CH^3.CHCl.CH^2Cl}_{\text{1,2-Dichloropropano}} + HI.$$

Mostraram ainda que fazendo reagir o *chloro sobre o propyleno monochlorado* C^3H^5Cl *na obscuridade,* se obtinham dois propylenos bichlorados $C^3H^4Cl^2$ isomeros, reacção que é, como se vê, uma substituição.

Mas se a reacção se fizer *á luz,* o resultado é uma addição ou fixação de chloro, e o producto é o chloracetol chlorado $C^3H^5Cl^3$.

Na obscuridade:

$$\underbrace{\begin{array}{l} CH^2 \\ \| \\ CCl \\ | \\ CH^3 \end{array}}_{\substack{\text{2-Chloro-} \\ \text{propyleno} \\ \text{(P.E} = 23°)}} \rightarrow \underbrace{\begin{array}{l} CH^2 \\ \| \\ CCl \\ | \\ CH^2Cl \end{array}}_{\substack{\text{2,3-Dichloro-1} \\ \text{propyleno} \\ \text{(P.E} = 92°\text{-}94°)}} \text{ e } \underbrace{\begin{array}{l} CHCl \\ \| \\ CCl \\ | \\ CH^3. \end{array}}_{\substack{\text{1,2-Dichloro-1} \\ \text{propyleno} \\ \text{(P.E} = 75°)}}$$

Á luz:

$$\begin{array}{ccc} CH^2 & & CH^2Cl \\ \| & & | \\ CCl & \rightarrow & CCl^2 \\ | & & | \\ CH^3 & & CH^3. \\ \text{2-Chloro-} & & \text{1,2,2-Tri-} \\ \text{propyleno} & & \text{chloropano} \\ & & \text{(Chloracetol} \\ & & \text{chlorado)} \\ & & \text{(P.E = 122-124°)} \end{array}$$

Os dois dichloropropylenos, de que acabamos de fallar, são identicos ao que se obtem na acção da agua ou da potassa alcoolica sobre o chloracetol chlorado:

$$\underbrace{CH^2Cl.CCl^2.CH^3}_{\text{Chloracetol chlorado}} - HCl = \underbrace{C^3H^4Cl^2}_{\text{Dichloropropylenos (2 isom.)}}.$$

Mostraram tambem que eram identicos o chloropropyleno C^3H^5Cl derivado do chloracetol e o derivado do chloreto de propyleno [1].

Fazendo reagir a potassa alcoolica sobre a trichlorhydrina, obteem-se tambem dois propylenos dichlorados: um é identico ao 2,3-dichloropropyleno, já referido; o outro, diverso dos dois já mencionados, é a β-epichlorhydrina, chamada, na linguagem de hoje, 1,3-dichloropropyleno, fervente nas proximidades de 106°:

$$\begin{array}{ccccc} CH^2Cl & & CH^2 & & CHCl \\ | & & \| & & \| \\ CHCl & \rightarrow & CCl & e & CH \\ | & & | & & | \\ CH^2Cl & & CH^2Cl & & CH^2Cl. \\ \text{Trichlorhy-} & & \text{2,3-Dichloro-} & & \text{1,3-Dichloro-} \\ \text{drina} & & \text{propyleno} & & \text{pyleno} \end{array}$$

Assim foi demonstrada a existencia de tres propylenos bichlorados $C^3H^4Cl^2$.

---

[1] *Bulletin de la Societé chimique de Paris*, 2.ª série, t. XV, pagg. 4-5. São ambos o 2-chloropropyleno.

Este ultimo, a β-*epidichlorhydrina*, é o que se obtem na acção do oxychloreto de phosphoro ou do anhydrido phosphorico sobre a dichlorhydrina [1]; fôra obtido por Reboul, mas não no estado de pureza, tratando [2] a trichlorhydrina pela potassa caustica solida:

$$\underbrace{\begin{array}{l} CH^2Cl \\ | \\ CHOH \\ | \\ CH^2Cl \end{array}}_{\substack{\text{s-Dichlorhy-} \\ \text{drina} \\ (P.E = 176^\circ)}} - H^2O = \underbrace{\begin{array}{l} CHCl \\ \| \\ CH \\ | \\ CH^2Cl. \end{array}}_{\substack{\text{1,3-Dichloro-} \\ \text{pyleno} \\ (P.E = 105\text{-}107^\circ)}}$$

Havendo reconhecido que na acção do chloreto de iodo sobre o chloreto de isopropylo, o chloro ia substituir o hydrogenio n'um radical methylo ainda não chlorado, formando-se apenas o 1,2-dichloropropano $CH^3.CHCl.CH^2Cl$ (chloreto de propyleno ordinario), pensaram que, tratando tambem pelo mesmo reagente este ultimo chloreto resultaria a trichlorhydrina; se assim fosse, por saponificação aquosa d'esta ultima, obter-se-hia a glycerina, conforme o methodo já indicado por Berthelot para regenerar esta ultima. Esta previsão foi realisada: o chloreto de propyleno, pela acção, a 140°, do chloreto de iodo secco em vasos fechados, gera, de facto, o trichloropropano, identico á trichlorhydrina.

As suas primeiras investigações foram feitas sobre o propyleno ou propeno, obtido por meio do iodeto de allylo [3], o qual deriva, como é sabido, da glycerina. Mas o propyleno pode-se obter a partir do alcool isopropylico por deshydratação, e os dois auctores demonstraram que o chloreto de isopropylo, quer provenha do iodeto de isopropylo preparado com a glycerina, quer do alcool isopropylico obtido pela hydrogenação da acetona, é sempre o mesmo corpo [4].

---

(1) *Bulletin de la Société chimique de Paris*, 2.ª série, t. XVIII, pag. 50.

(2) O producto principal d'esta reacção é a α-epidichlorhydrina ou 2,3-dichloropropyleno $CH^2Cl.CCl:CH^2$.

(3) *Bulletin de la Société chimique de Paris*, 2.ª série, t. XVIII, 1872, pag. 7.

(4) *Bulletin de la Société chimique de Paris*, 2.ª série, t. XVIII, 1872, pagg. 7-9.

Vê-se que esta synthese da glycerina se realisa independentemente de qualquer composto allylico, já derivado da glycerina, e que assim é realmente uma *synthese total da glycerina:*

$$\underbrace{CH^3.CO.CH^3}_{\text{Acetona}} \rightarrow \underbrace{CH^3.CHOH.CH^3}_{\text{Alcool isopropylico}} \rightarrow \underbrace{CH^3.CH:CH^2}_{\text{Propyleno}}$$

$$\rightarrow \underbrace{CH^3.CHI.CH^2Cl}_{\text{Chloroiodeto de propyleno}} \rightarrow \underbrace{CH^3.CHCl.CH^2Cl}_{\text{Chloreto de propyleno}} \rightarrow \underbrace{CH^2Cl.CHCl.CH^2Cl}_{\text{Propano trichlorado}}$$

$$\rightarrow \underbrace{CH^2OH.CHOH.CHOH.}_{\text{Glycerina}}$$

Este *chloroideto de propyleno*, que ferve a 149°, obtem-se facilmente fazendo passar n'um soluto aquoso concentrado e limpido de protochloreto de iodo o gaz propyleno; e do chloroideto de propyleno facilmente se passa ao *chloreto de propyleno,* aquecendo-o a 100° em vasos fechados, durante 16 a 20 horas, com o bichloreto de mercurio em quantidade conveniente (1).

Ainda mostraram que na acção do chloreto de mercurio sobre o brometo de propyleno $C^3H^6Cl^2$ se obtem um *chlorobrometo de propyleno* (2) $C^3H^6ClBr = CH^3.CHCl.CH^2Br$, liquido que ferve a 120°; que, quando o bromo actua sobre o chloroformio, se forma o chlorobrometo de carbono, ou, melhor, o *trichlorobromomethano* CCl^3Br, corpo liquido, P.E = 104°, um tanto parecido com o chloreto de carbono (3); e que quando o bromo actua sobre a α-epidichlorhydrina se obtem um dichlorodibromopropano $C^3H^4Cl^2Br^2$, ferverte a 205°, que é o *1,2-dichloro-2,3-dibromopropano* $CH^2Cl.CClBr.CH^2Br$ (4).

Como derivante d'estas investigações, tentaram os dois chimicos verificar se na acção do chloreto de iodo secco sobre o chloroformio se obteria um chloroiodeto de carbono CCl^3I; a reacção não se manifestou nesse sentido; formou-se acido chlor-

---

(1) *Bulletin de la Societé chimique de Paris,* 2e serie, t. XVII, 1872, pag. 535-537.

(2) *Bulletin de la Societé chimique de Paris,* 2e série, t. XVII, 1872, pag. 532.

(3) *Bulletin de la Societé chimique de Paris,* 2e série, t. XVII, 1872, pagg. 538-539.

(4) *Bulletin de la Societé chimique de Paris,* 2e série, t XV, 1871, pag. 4.

hydrico, separou-se iodo, e o producto da reacção foi o tetrachloreto de carbono [1]; segundo elles, forma-se provavelmente primeiro o chloroiodeto de carbono, que depois é destruido pelo chloreto de iodo:

$$CCl^3I + ClI = CCl^4 + I^2.$$

VII

O outro grupo de investigações originaes feitas em commum com FRIEDEL refere-se a derivados interessantes da acetona.

Sabe se que por hydrogenação da acetona aquosa pelo amalgama do sodio se obtem um alcool secundario em C^3, que é o alcool isopropylico; pela reducção operada sobre a acetona humida pelo sodio em meio alcalino, obtem-se, além do alcool isopropylico, um producto de condensação, crystallysado, P.F = 38°, a *pinácona*, que FRIEDEL definiu como *glycol biterciario:*

$$\underbrace{\left.\begin{matrix} CH^3.CO.CH^3 \\ CH^3\ CO.CH^3 \end{matrix}\right\}}_{\text{2 mol. de acetona}} + \underbrace{H^2}_{\text{Hydrogenio}} = \underbrace{\begin{matrix} CH^3-COH-CH^3 \\ | \\ CH^3-COH-CH^3. \end{matrix}}_{\text{Tetramethylethylenglycol ou 2.3-Dimethyl-2,3-butandiol } C^6H^{14}O^2}$$

D'este corpo deriva, por uma reacção especial provocada pelo aquecimento com o acido sulfurico diluido, um anhydrido, que é uma acetona, a trimethylacetona, que se chama resumidamente *pinacolina* $C^6H^{12}O$:

$$\underbrace{(CH^3)^2C\mathit{OH}-C\mathit{OH}(CH^3)^2}_{\text{Pinácona}} - H^2O = (CH^3)^3C-CO.CH^3$$

$$=\underbrace{\begin{matrix} & CH^3 & \\ & | & \\ CH^3- & C & -CO.CH^3 \\ & | & \\ & CH^3 & \end{matrix}}_{\text{Dimethyl-2-butanona-3 (P.E = 106°)}}$$

---

(1) *Bulletin de la Societé chimique de Paris,* 2e série, t. XVII, 1872, pagg. 537-558.

A hydrogenação da pinacolina pelo amalgama de sodio dá origem á formação de um alcool terciario, o *alcool pinacolico* $C^6H^{14}O$, crystallisavel e fusivel a $+4^o$; e este oxydado moderadamente regenera a pinacolina.

A oxydação da pinacolina pelo acido chromico dá um acido em C^5, o *acido pivalico*, identico ao acido trimethylacetico ou dimethylpropionico, isomero do acido valerico, e já preparado, por outro modo, por **Boutlerow**:

$$\underbrace{(CH^3)^2COH.COH(CH^3)^2}_{\text{Pinácona } C^6H^{14}O^2} \rightarrow \underbrace{(CH^3)^3\vdots C.CO{:}CH^3}_{\text{Pinacolina } C^6H^{12}O} \rightarrow \underbrace{(CH^3)^3\vdots C.COOH.}_{\substack{\text{Acido trimethylacetico} \\ C^5H^{10}O^2 \\ (P.F = 35^o;\ P.E = 161^o)}}$$

VIII

A estas investigações originaes sobre assumptos delicados de chimica organica devem acrescentar-se os trabalhos praticos de ensino, que exerceu com zelo e dedicação inexcediveis, quer como chefe dos trabalhos chimicos na Escola Central de Artes e Manufacturas desde 1871 a 1886, quer como professor de chimica analytica na mesma escola a partir de 1886; quer ainda como professor de chimica na Escola Municipal de physica e de chimica industriaes de Paris desde 1881 até á sua doença.

Por vezes lhe pediam os seus discipulos e amigos que publicasse o resumo do seu ensino de analyse na Escola Central; mas não o quiz fazer, por não julgar ainda bastante aperfeiçoado o seu trabalho. Foi o seu successor no professorado da Escola Normal, o sr. prof. **R. Engel**, que n'um livro muito recommendavel e apreciado deu á luz essas notas e apontamentos, que constituem um guia seguro para os que trabalham nos laboratorios.

O seu devotado amigo, **Ch. Friedel**, prefaciando esta publicação, definiu o alto conceito em que era tido o labôr de **Roberto Silva**:

«Elle consagrára, diz **Friedel**, d'um modo exclusivo, talvez em demasia, em favor de seus amigos. e sem poupar o sufficiente ás suas forças, os ultimos annos da sua vida laboriosa ao ensino da chimica analytica. Desde o dia em que foi nomeado chefe dos trabalhos de chimica analytica na Escola Central, occu-

pava-se em estudar, com a consciencia que punha sempre no cumprimento de seus deveres, e sem perder nunca de vista o interesse de seus discipulos, todos os methodos d'analyse, experimentando-os de per si e escolhendo aquelles que achava mais simples e mais exactos. Em conferencias feitas aos discipulos resumia as indicações uteis para a applicação dos methodos.

«Nomeado mais tarde professor de chimica analytica na Escola Municipal de physica e chimica industriaes, e depois professor de chimica analytica na Escola Central, teve de dar maior desenvolvimento ao seu trabalho. Pela circunstancia de ter redigido as suas conferencias, remodelando-as por diversas vezes afim de as aperfeiçoar cada vez mais, organisou as suas lições com o mesmo cuidado, introduzindo na exposição os processos novos, de cujo valor se certificara por experiencia.

«Foi tal o exito do seu ensino na Escola Central, a orientação que lhe dava era tão pratica, que poucos annos depois de iniciar os seus cursos, foi solicitado a publicar as suas conferencias, fazendo d'ellas um tratado de chimica analytica. Prestou-se com satisfação a este encargo; mas, desconfiando sempre de si proprio, não se tinha resolvido a confiar o seu manuscripto á imprensa quando a morte o surprehendeu.

«Assim se encontraram, entre os seus papeis, um grande numero de lições já completamente redigidas, e muitas notas, planos de conferencias ou de lições, escriptos alguns diversas vezes, e que davam a prova do seu continuo labutar.

«Tendo sido feita uma primeira classificação dos manuscriptos pelo sr. Ph. de Clermont, o sr. Engel, que succedeu a Silva, quiz encarregar-se de preparar a obra para a impressão, eliminando o que se achava duplicado, e acabando a redacção do que se achava simplesmente indicado.»

Com o fim de se aperfeiçoar no conhecimento das linguas e de apreciar os progressos realisados em outras nações em materia de ensino pratico da chimica, realisou Roberto Silva muitas viagens de estudo; e consignou as suas impressões n'uma carta a Dumas, que a fez inserir nos *Annales de chimie et de physique* (1).

(Continúa).

(1) *Annales de chimie et de physique*, 5.º série, t. XXVII, 1882, pag. 565. Esta carta foi depois publicada no *Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes*, de Lisboa, n.º XXXV, 1885.

O CAPITALISMO E AS SUAS ORIGENS EM PORTUGAL

POR

Bento Carqueja

(Continuação)

Seculo XV

O alvorecer do seculo XV não foi dos mais propicios para a formação da propriedade capitalista em Portugal. Até 1411, luctas incessantes, que só vieram a terminar com a paz confirmada pelo tratado de Aylham [1]; d'ahi até ao meiado do seculo, o arrojado feito de Ceuta, que abriu ao reino, rejuvenescido e orgulhoso da liberdade, a vida nova de aventuras e emprezas arriscadas.

Como consequencia da emigração de parte da nobreza para Castella e da accumulação de seus bens no patrimonio da nobreza real, foram unidas muitas herdades em uma só casa. O mestre de Aviz, que distribuiu, com a maior largueza, os bens da coroa pelo seus parciaes, viu-se obrigado a promulgar provisões restrictivas na *lei mental* [2].

---

[1] Fernão Lopes, *Chronica de D. João I*, tomo 2.º, cap. 192.

[2] Cardeal D. Francisco de S. Luiz, *Memoria ácerca das noticias que nos restam do dr. João das Regras e de algumas especies a respeito da lei mental*, tom. 1.º, pag. 255-291.

A reforma dos foraes decretada por D. Manoel foi um acto notavel, mas não realizou, em relação á economia rural do paiz, todas as promessas que apparentava antes. As violencias dos poderosos contra os povos continuavam, a pretexto de arrendarem os direitos e portagens estabelecidos nas cartas da povoação. Para de uma vez pôr cobro ás violencias dos nobres, dispôz o rei que se inserisse no texto dos foraes a lei de D. Fernando, que vedava aos fidalgos tomassem coisa alguma sem primeiro satisfazer o seu preço (1).

No ultimo quartel do seculo xv, os senhores vexavam com o peso dos encargos, que lançavam; os fidalgos, seus criados e familiares exerciam verdadeiras violencias e expoliações. Além dos coutos concedidos pela lei, os mestres das ordens militares, os abbades e prelados e os senhores de grandes casas chegavam a receber em suas villas e castellos os malfeitores, que protegiam. Lançavam derramas sobre as suas aldeias; sonegavam as proprias colheitas; mas iam ás eiras pôr o preço ao grão colhido pelos *villãos* e abarcal-os, para depois os venderem pelo dobro e pelo triplo (2).

A execução da lei das sesmarias transformára-se n'um violento instrumento de oppressões: os nobres, abusando do seu predominio, peitavam os sesmeiros nas localidades e obtinham a entrega das terras, que mais cubiçavam, sem audiencia dos proprietarios, iniquamente despojados.

Ao mesmo tempo que as oppressões dos poderosos se exerciam cruelmente, os judeus creavam para si uma situação dia a dia mais vantajosa.

Com as importantes e valiosas concessões feitas por D. João I, não é para admirar que elles prosperassem, na tranquilidade da sua vida e dos seus haveres. Podiam assim dedicar-se á actividade do commercio e da industria, em que eram verdadeiramente eximios.

Um dos ramos de negocio, a que se entregavam com especial predilecção, mas que não podiam exercer sem licença regia,

---

(1) J. S. RIBEIRO, *Memoria historica, juridica e economica sobre a reforma dos foraes.*

(2) Veja-se a larga referencia a estas oppressões, feita nas côrtes de Evora de 1481-1482.

era a compra do ouro, prata ou moedas; os judeus accusados d'essa compra perdiam os bens, que passavam para a posse dos denunciantes. Facil é calcular quantos abusos se praticavam á sombra d'essa formula; por isso, D. João prohibiu que qualquer judeu, accusado do alludido crime, fosse preso ou expoliado dos seus bens, sem primeiro ser querellado, a querella ser julgada e as testemunhas conhecidas; se a sentença fosse dada a favor do judeu, este receberia «outro tanto quanto esse querelloso averia, se fosse provado» (1).

Com estas e outras concessões conquistaram os judeus uma posição desafogada. Chegaram a figurar como arrendadores-móres das fazendas do reino; contribuiram para a sustentação dos municipios, pagando os da communa do Porto, só pelo tributo de capitação ou de moeda, 2000 maravedis (2) e desempenhavam, protegidos por alguns bispos e concelhos, as funcções de physicos e cirurgiões.

Durante o reinado de D. Duarte, foi retirado aos judeus o exercicio de varios cargos e officios respeitantes á fazenda publica, bem como foi prohibido que os particulares, especialmente os nobres, lhes entregassem a gerencia dos seus haveres (3); eram esses principalmente que se aproveitavam do tacto administrativo e financeiro dos judeus, ferindo-os, porém, sempre que podiam. Apesar de tantas prohibições, os judeus continuaram a arrematar a cobrança dos impostos e a praticar actos, que o povo reputava vexatorios e expoliadores (4).

Tal ostentação fizeram das suas riquezas os judeus, no reinado de D. Affonso v, que podemos considerar ahi o ponto de partida para represalias gravissimas, verdadeiramente demolidoras do poder dos judeus em Portugal.

Essa ostentação e as liberdades, de que faziam gala, começaram por exacerbar os odios do povo, manifestados bem evidentemente nos assaltos e tumultos, que occorreram contra a judiaria de Lisboa, em 1449.

---

(1) *Ordenações Affonsinas*, l. 2.º, tit. LXXXII.

(2) *Archivo da Camara Municipal do Porto*, Pergaminhos, l. II; Livro Grande, fol. 48, col. 1.ª e 2.ª

(3) *Ordenações Affonsinas*, l. 2.º, tit. LXXV.

(4) A. Herculano, *Historia e origem do estabelecimento da inquisição*, t. 1.º, pag. 85.

A aversão contra os judeus adquiria, dia a dia, maior intensidade [1], como claramente se denuncia nas actas das côrtes convocadas durante a segunda metade do seculo XV, pelas quaes se reconhece que a linguagem dos procuradores das cidades e villas representava a expressão do pensar e do sentir «não só do vulgo, mas tambem da burguezia christã».

Não tardaram, portanto, as restrições ás vantagens e liberdades, de que os judeus gosavam. Nas côrtes de Coimbra, em 1473, prohibiu-se-lhes que comprassem quaesquer bens de raiz para dotarem e apropriarem ás synagogas [2], etc.

Continuaram no reinado de D. João II os queixumes e protestos contra os judeus, preparando-se por esta forma a tragedia dolorosa, que bem depressa se desenrolou.

O monarcha demonstrára, desde os principios do seu reinado, pronunciada predilecção pelos judeus, porque reconhecera n'elles homens distinctos pela sciencia, especialmente na astronomia, nos quaes poderia achar auxiliares poderosos para a realisação das suas largas ambições de novas descobertas e novas conquistas.

João Peres da Covilhã e Affonso de Paiva, mandados por terra para descobrir meio de tentar a navegação ao longo da costa africana, levaram cartas geographicas feitas pelo astronomo notabilissimo MARTIM BEHAIM e pelos judeus mestre Rodrigo e mestre José, medicos do monarcha [3].

A despeito da protecção do rei, a situação dos judeus em Portugal aggravou-se. Em 1482, a judiaria de Lisboa foi saqueada pelo povo. Os judeus vindos de Castella eram acoimados de causadores da peste; a censura do Porto, seguindo o exemplo da de Lisboa, dispoz que nenhum judeu vindo de Espanha entrasse na cidade [4], sendo, todavia, essa medida invalidada por D. João II.

Promulgado pelos reis catholicos de Espanha, Fernando e Izabel, o decreto de 31 de março de 1492, que obrigou os judeus a procurarem nova patria, muitos voltaram-se para Portugal

(1) A. HERCULANO, *Historia da origem e estabelecimento da inquisição em Portugal*, t. 1.º, pag. 193.
(2) V. de Santarem, *Historia e theoria das côrtes*, t. 1.º, pag. 24.
(3) J. DE BARROS, Decadas, l. IV, pag. 64.
(4) *Archivo Municipal do Porto*, Livro verde, anno 1485, fol. 9.

e D. João viu na admissão d'elles uma boa fonte de receita, para poder realisar o seu sonhado plano de conquistas em Africa.

Impoz que cada um d'elles devia pagar oito cruzados «pagos em quatro pagas» (1), exceptuando totalmente as creanças de peito e, em parte, os officiaes mechanicos (ferreiros, latoeiros, malheiros, armeiros) que, ficando no reino, só pagariam metade.

O livre transito e entrada em Portugal era sómente por oito mezes e D. João obrigou-se a dar-lhes navios para os transportar aonde elles quizessem.

Alexandre Herculano diz que, elevando-se a perto de 800:000 a emigração dos judeus para Portugal, não seria calculo exaggerado suppôr que um terço d'esse numero transpoz a fronteira (2). E com esses emigrantes veio uma somma consideravel de dinheiro, de que D. João II soffregamente tomou conta para a consecução da conquista de Africa, sonho que não realisou, apparecendo junto, depois da sua morte, esse dinheiro (3). Note-se, porém, que muitos judeus transpozeram clandestinamente a fronteira portugueza, para se esquivarem ao pesado imposto, a despeito dos perigos pelos caminhos, que eram obrigados a percorrer.

Mas não bastou aos judeus a capitação de oito cruzados para lhes abrir a hospitalidade portugueza; como se aproximava o praso fatal dos oito mezes concedidos, tiveram de offerecer aos officiaes encarregados das contravenções quinze mil cruzados, que foram logo acceites e ainda por cima D. João II intendeu que bastava transportal-os a Tanger e Arzilla, aonde chegavam nas mais desgraçadas condições!

E tal era a fama das riquezas dos judeus, que, tendo-se espalhado que elles haviam devorado o ouro, quando pelo edicto de Fernando e Izabel lhes fôra prohibida a sahida dos metaes

(1) Damião de Goes, *Chronica de D. Manuel*, pag. 1 a 10.

(2) Alexandre Herculano, *Historia da origem e estabelecimento da inquisição*, t. 1.º, pag. 102.

(3) «... el-Rey ouue hũa grande soma de dinheyro, do qual nunca despendeo hũa só peça, por que o tinha pera a dita passagem, que com a sua doença não pode fazer e pro sua morte se achou todo o dinheyro junto, assi como o ouue sem faltar nada». Garcia de Rezende, *Chronica de D. João II*, cap. CLXIII.

preciosos, os mouros matavam-os para lhes buscarem nas entranhas as riquezas, que de outro modo não lhes encontravam (1).

As leis espanholas prohibiam aos nobres occuparem-se de qualquer profissão ou industria; prohibiam-lhes até que empregassem os seus capitaes em emprezas industriaes e commerciaes. Por isso, com a expulsão dos judeus, que tratavam exclusivamente os negocios de dinheiro, entraram em Espanha numerosos estrangeiros a desempenhar a missão, que elles tinham tomado sobre si. Restava para os espanhoes a permuta das suas materias primas com os artefactos do estrangeiro e o seu transporte por mar (2).

Commerciantes e fabricantes não eram considerados em Espanha, nem eram admittidos a occupar cargos administrativos. Como os enviados ás côrtes eram eleitos pelas corporações municipaes, segue-se que nem o commercio nem a industria tinham representação em côrtes (3).

Prosigamos na historia das perseguições aos judeus, as quaes iam, a bem dizer, ainda no começo.

D. Manuel mantinha a predilecção dos seus antecessores pelos judeus, aos quaes começou por conceder carta de alforria, dando-lhes permissão de se estabelecerem onde quizessem (4); mas bem depressa teve de submetter-se aos mandos da sua ambição e ao imperio da voz do coração.

Effectivamente, para realisar o sonho de subir ao throno de Espanha, concebeu o plano de casamento com D. Izabel, filha mais velha dos reis catholicos; mas esta, induzida, sem duvida, pelos paes, propoz-lhe o adiamento do casamento, até completa expulsão dos judeus de Portugal, e no contracto nupcial, lavrado em 1497, ficou exarada a clausula expressa da expulsão dos judeus.

Forte era a corrente, que se levantava a favor dos judeus, porque poderosos motivos de ordem politica, economica, social e

---

(1) A. Herculano, *Historia da inquisição*, t. 1.º, pag. 106.

(2) K. Haebler, *Die wirtschaftliche Blüte Spaniens in 16 Jahrhundert*, pag. 45 e 51.

(3) K. Haebler, op. cit., pag. 61.

(4) «El-Rey D. Emanuel ... tanto que regnou libertou logo estes judeus cativos, sem delles, nem das communas dos judeus naturaes do Reyno querer acceptar hũ grande serviço...». Damião de Goes, *Chronica de D. Manuel*, cap. X, pag. 21.

religiosa recommendavam a permanencia d'elles em Portugal. A propria Espanha reconheceu o erro que praticára; mas era tarde para o remediar [1]. Não se esquecia que os judeus reuniam variadas aptidões, sobretudo para as artes mechanicas, e que possuiam riquezas valiosissimas; ponderava-se tambem que, se elles fossem coagidos a acolher-se entre os mouros, levariam, sem duvida, a estes os seus bens, e, sobretudo, os seus segredos, alguns dos quaes bem preciosos.

Em todo o caso, predominou o grito da expulsão, a qual foi decretada a 5 de dezembro de 1496 [2].

Dez mezes foram concedidos para escolherem entre a sahida do reino e a morte: «sob pena de morte natural e perder as fazendas para quem os acusar» [3]. E essa resolução foi aggravada com a ordem para se tirarem aos judeus, que partissem, os filhos menores de 14 annos, a fim de serem baptisados e doutrinados na fé catholica. O que se passou em todo o reino, por virtude d'essa ordem, mal póde imaginar-se; o amor paternal explosiu em assomos de furia, de bravura e de desesperação. O rei levava por diante o seu plano funesto, fechando os ouvidos aos melhores conselheiros: «não me importo de razões, não curo do direito!» — exclamava elle em Extremoz.

Bem depressa se manifestaram as consequencias do erro praticado; o rei pretendeu atalhar a essas consequencias por varias formas, começando por conceder largos privilegios aos judeus; mas estes, desconfiados das palavras do monarcha, aproveitaram o ensejo para pôrem a salvo as suas pessoas e bens; os mais abastados vendiam as suas propriedades aos christãos e convertiam o producto da venda em letras de cambio sobre praças estrangeiras.

Quiz-se pôr um dique a esse exodo de capitaes; mas baldados foram os esforços, apesar da ameaça da perda de todas as fazendas e bens moveis e de raiz, onde quer que fossem achados e da nau ou naus e navios, que os levassem.

---

(1) «Na verdade, parece que a Hespanha conheceu o erro, que tinha commettido em expulsar do seu seio uma raça laboriosa e possuidora de grandes riquezas; mas o passo estava dado e então só restava anniquilar as vantagens que Portugal poderia tirar da falsa politica dos reis de Castella». *Panorama*, t. 1.º

(2) Damião de Goes, *Chronica de D. Manuel*, cap. XVIII.

(3) *Ord. Man.*, liv. 2.º, tit. XLI.

Campeou infrene a usura, no seculo XV, e vamos encontrar gente de elevada stirpe desempenhando as funcções de prestamista e penhorista. O dr. SOUSA VITERBO dá minuciosa informação a tal respeito n'um curioso opusculo. Apresenta-nos, em primeiro lugar, D. Guiomar de Castro, avó materna de Affonso de Albuquerque, em cuja casa as mais gradas pessoas, incluindo o rei e os principes, iam depositar os seus penhores (1), sendo-lhe concedidos privilegios especiaes para a liquidação de dividas. Menciona o erudito escriptor estar persuadido de que D. Affonso V destinára ao apresto de algumas das armadas, que foram á conquista dos lugares da Africa, as 8:000 dobras, de que ainda no anno de 1471 restavam por satisfazer 6:286 $^1/_2$ e 190 reaes brancos.

Não estava D. Guiomar só em campo, como prestamista; entre as pessoas, que lhe faziam concorrencia, contava-se a condessa de Loulé, a qual emprestou ao bispo de Evora D. Julio, ouro, prata e dinheiro para os gastos de uma esquadra de soccorro, que o mesmo bispo commandou, armada por D. Affonso V, para uma nova cruzada, a pedido do papa Sixto V (2).

Outro prestamista notavel foi D. Duarte de Menezes, que emprestou ao infante D. Henrique a somma de 6:000 dobras de ouro, garantidas com certas propriedades, por sua morte. Vem a proposito mencionar que para os gastos de Ceuta pedira o infante D. Henrique de emprestimo ao conde de Arrayolos a quantia de 2.251:776 reaes brancos (3).

Não deve passar sem registro que os italianos, especialmente os genovezes e os florentinos, não só tomaram parte activa na nossa navegação e commercio, como contribuiram para o desenvolvimento da industria. N'um outro valioso opusculo sobre o monopolio da cortiça no seculo XV, diz o dr. SOUSA VITERBO: «Estou convencido de que os italianos residentes em Lisboa, mareantes, mercadores, banqueiros, armadores, contribuiram muito, por intermedio das suas relações com as praças da Italia e da Europa, para divulgar os progressos dos nossos descobrimentos maritimos» (4).

---

(1) SOUSA VITERBO, *A avó materna de Affonso de Albuquerque — Os penhoristas do seculo* XV, pag. 8.
(2) Idem, pag. 10.
(3) Idem, pag. 11.
(4) SOUSA VITERBO, *O monopolio da cortiça no seculo* XV, pag. 9.

Portugal era então o receptaculo de riquezas sem conta. Abundava o dinheiro; Lisboa era o emporio do commercio. Affirma **Damião de Goes** que muitas vezes via na casa da contractação da India mercadores com sacos cheios de dinheiro em ouro e em prata, para fazerem pagamento do que deviam, o qual dinheiro lhes diziam os officiaes que tornassem o outro dia, por não haver tempo de o contar ([1]).

Os navios da India chegavam constantemente ao Tejo carregados de preciosidades.

«Era o arroz e a pimenta e as mais especiarias, o cravo das Molucas, a noz e a massa de Banda, o gengibre de Kallam, a canella de Sinhala; era o marfim da Guiné, as sedas da China e os tapetes da Persia, o ambar das ilhas Malaias, o sandalo de Timor, as tecas e couros de Katschhi, o anil de Kambai, o pau de Solor, as cambraias de Bengala; eram o ebano, o borax, a camphora, a laca, a cera, o almiscar de Ormuz. Além d'isto, Sofala e Sumatra mandavam o ouro e a prata, o Japão e o Manaar as perolas, que tambem vinham de Kalckar; o Pegu os rubís e toda a India os diamantes. De Ormuz recebiam-se os cavallos da Arabia e da Persia» ([2]).

Com a descoberta do caminho maritimo para a India conseguiu Portugal haver ás mãos o monopolio do commercio das especiarias, submergindo sob a sua supremacia o commercio indo-egypcio e dispondo do tracto das especiarias com as nações do norte da Europa, paizes de Flandres, Inglaterra, etc. ([3]).

Assim cavou a ruina do commercio de Veneza, até ahi omnipotente. Machiavelli escrevia de Veneza para Florença: «Os preços das especiarias armazenadas no Adria cahiram para menos de metade».

Era consideravel, incalculavel mesmo, o trafico importantissimo, que as cidades italianas faziam antes das nossas conquistas. A receita de Florença era calculada em mais do que o rendimento total da Inglaterra e Irlanda juntas ([4]).

Foram verdadeiramente collossaes as sommas desviadas de

([1]) Damião de Goes, *Chronica de D. Manuel.*
([2]) Oliveira Martins, *Historia de Portugal*, t. 2.°, pag. 24.
([3]) Heyd, *Geschichte des Levantehandels in Mittelalter*, 3.° periodo, n.° 10.
([4]) J. de Vasconcellos, *A Renascença portugueza*, pag. 7.

Veneza para Lisboa. Não é para admirar, pois, que a republica de Veneza propozesse, como propoz, a D. Manuel um contracto para a compra *de todas as especiarias* chegadas das Indias a Lisboa, depois de satisfeito o consumo nacional.

Ao mesmo tempo, a feitoria portugueza de Flandres, verdadeira escola da diplomacia, avançava em importancia. Em 1488, o feitor de Portugal, Diogo Fernandes, servia de intermediario a Maximiano da Austria, que sollicitava de D. João II os seus bons officios para a paz com o rei de França. O principe portuguez offerecia, logo depois, 100:000 ducados de ouro para resgatar o seu illustre parente do captiveiro de Bruges [1].

Seculo XVI

Somos chegados ao tempo em que verdadeiramente se realisou a concentração capitalista.

Comecemos por examinar o movimento dos negocios em Portugal, no começo do seculo XVI.

Sobre esta interessante materia, offerece-nos preciosos dados Konrad Haebler no seu livro *Die Geschichte der Fugger'schen Handlung in Spanien.*

Em 13 de fevereiro de 1503 assignava D. Manuel um tratado pelo qual era concedida auctorisação a varios commerciantes allemães para estabelecerem feitorias em Lisboa. N'um appendice a esse tratado, ampliavam-se as concessões n'elle contidas a todos os commerciantes estrangeiros, que estabelecessem em Portugal uma feitoria, com, pelo menos, 25 ducados de capital. Entre os primeiros, que se aproveitaram d'essa concessão, contam-se os Fuggers, que, em 1504, enviavam a Lisboa o seu primeiro feitor, Marcos Zimmermann.

N'esse anno, a 1 de agosto, concluia Lucas Rem, feitor da casa Welser, de Augsburg, um tratado com D. Manuel, pelo qual lhe era concedida participação no commercio directo com as Indias, podendo expedir na frota, que seguia então para o Oriente, um commissario seu e generos para a permuta.

A mesma concessão havia já sido feita aos italianos Bartolomeo

---

[1] J. de Vasconcellos, *A feitoria de Portugal em Flandres* (1885).

Marchione, de Florença, e Antonio Sabrago, Francesco Carducci e outros. Na frota, que partiu em 1505, os negociantes italianos tinham participação de 30:000 cruzados (a 400 réis, isto é, um pouco mais do que um ducado); os Welser tinham entrado com 20:000 ducados; os Fuggers e outros tinham participação no valor de 16:000 cruzados. Foi por esta primeira frota que os Fuggers mandaram o seu representante para Portugal.

Lisboa tornou-se um emporio commercial de tal grandeza, que, como vimos já, a republica de Veneza propoz a D. Manuel um contracto para a compra de todas as especiarias chegadas das Indias, excedentes do consumo de Portugal. Em 1522, assignou-se esse contracto; mas foi baldado, porque a lei natural do progresso zombou do ouro e do contracto. Veneza cahiu (1).

Passado algum tempo, foi decretado por D. Manuel que toda a pimenta vinda das Indias devia entrar na alfandega de Lisboa e d'ahi seria vendida aos compradores. Cessou, assim, a participação dos estrangeiros nas frotas da India.

Constituiu-se, mais tarde, o monopolio da venda das especiarias, monopolio que foi frequentes vezes administrado por allemães, genovezes e florentinos.

Os negocios dos commerciantes allemães em Lisboa consistiam, sobretudo, na compra de especiarias e na venda de cereaes, bem como de madeiras, cobre e outros artigos indispensaveis para o armamento dos navios destinados á derrota das Indias (2).

A feitoria de Flandres foi a primeira e a melhor eschola da diplomacia portugueza no seculo XVI, observa o sr. Joaquim de Vasconcellos. «Quem a julgar uma mera agencia commercial, onde se tratava só da venda das preciosas especiarias do Oriente, do negocio da canella, do cravo e da pimenta, engana-se deveras» (3).

Portugal tinha razões para se ufanar da feitoria de Flandres; essa feitoria e as suas agencias foram franqueadas aos homens

---

(1) «Vide o que Goes diz d'estas tentativas dos venezianos (*Chronica*, IV, pag. 631) e da missão de Alessandro di Pesaro a Lisboa. Goes ignorava que o contracto se ultimou, falta que fomos encontrar em *Kiesselbach*, pag. 380» — *apud* J. de Vasconcellos, *Renascença portugueza*, pag. 10.

(2) Haebler, *Die Geschichte der Fugger'schen Handlung in Spanien*, pagg. 23 e 24.

(3) J. de Vasconcellos, *A feitoria de Portugal em Flandres* (1885).

mais illustres da renascença, protegendo efficazmente as sciencias, as lettras e as artes. Um simples feitor, observa o sr. JOAQUIM DE VASCONCELLOS, ajudado apenas por um ou dois escrivães e com meios relativamente modestos, fez então mais, em beneficio do nome portuguez, do que embaixadas opulentissimas.

Curta foi a gloria da feitoria. Em fins de 1532, Lourenço Lopes, feitor de Flandres, escrevia de Antuerpia ao secretario do rei, Antonio Carneiro, expondo o apuro em que estava, por não poder pagar o que por lá se devia, a ponto de o fazerem jurar em juizo, que não sahiria de Flandres sem pagar (1).

Os feitores portuguezes subiram o Rheno, desde Colonia até Bosel, e desceram o Danubio, desde Ulm até Regensburg, para penetrarem na Italia pela via antiga de Brenner e valle de Adige (Insbruck, Brixen, Botzen, Trento, Verona). Ao lado d'estas tres estradas achavam-se os centros commerciaes e artisticos mais importantes da Idade Media e da Renascença, alimentados pelas duas grandes arterias fluviaes, que faziam affluir ao coração da Europa as riquezas do Occidente e do Oriente (2).

As vias fluviaes tinham como ponto de partida Antuerpia; a via maritima abria-nos os portos hanseáticos do Mar do Norte (Hamburgo) e do Baltico (Lubeck, Dantzig); o Elba abria-nos o caminho da Bohemia até Prag, um dos centros mais importantes dos seculos XIII e XIV. A Wistula levava o mercador a Warsovia e Cracovia. Em todos esses pontos encontravam-se feitorias e agentes portuguezes.

Tal riqueza commercial adquiriu Antuerpia, que a sua população quadriplicou em setenta annos. Os portuguezes figuravam entre os 2:500 navios que povoavam, em certos dias, aquelle porto; figuravam tambem na sua grandiosa Bolsa; tinhamos a nossa percentagem nos 500 milhões de coroas de prata, que a tanto montava a circulação total do commercio de Antuerpia. Os portuguezes eram, nos tres primeiros decennios de 1500-1530, os negociantes estrangeiros mais considerados em Antuerpia; tudo o que alli havia de notabilidades commerciaes estava em maior ou menor dependencia dos feitores de Portugal.

(1) *Corpo chronologico da Torre do Tombo,* cit. por J. DE VASCONCELLOS.
(2) J. DE VASCONCELLOS, *Renascença portugueza.* Estudos sobre as relações artisticas de Portugal nos seculos XV e XVI, pagg. XV e XVI.

A forma por que o governo portuguez contractava com os negociantes estrangeiros os fornecimentos de que carecia era, em geral, baseada na concessão de uma receita, durante um certo numero de annos, attingindo essa concessão quasi as condições de um monopolio.

Um dos artigos mais importantes d'estas transacções era o cobre, do qual os Fuggers tinham quasi o monopolio na Europa e do qual eram precisas grandes quantidades para a construcção dos navios das frotas portuguezes ([1]).

Á casa Fugger foi proposto por D. Manuel o fornecimento, por um certo numero de annos, de todos os navios de que o rei carecesse para a navegação das Indias. Esses navios deviam vir promptos dos portos allemães e construidos de novo. Em compensação, aos Fuggers seria reconhecido o direito de participação no commercio colonial, cuja exploração pertencia então aos chamados *contractadores* do monopolio. Não chegou, porém, a realisar-se esse plano ([2]).

Em virtude da monopolisação do commercio das Indias e em consequencia da decadencia dos negocios coloniaes, os Fuggers acabaram, em 1558, com a feitoria de Lisboa e passaram a dirigir os negocios de Portugal na sua filial de Sevilha.

Em 1576, tinham como representante, em Lisboa, João Henriques, hollandez, de origem portugueza. Tambem foi agente dos Fuggers em Portugal Damião de Goes.

Um negociante de Augsburg, Conrad Rott, foi *contractador* do monopolio da pimenta, em 1577.

O governo portuguez tinha passado aos seus credores titulos de divida, similhantes aos *juros* espanhoes, que se tinham tornado papeis de especulação; eram negociados a preços variaveis e cotados, por vezes, a 40 e 45 por cento. Estes titulos eram usados para pagamento das dividas pelo valor nominal.

Em 1557, os Fuggers estavam de posse de titulos da divida portugueza no valor de 15 $^1/_2$ contos (40:000 ducados) ([3]).

Os Fuggers occupavam-se tambem do commercio de pedras preciosas.

([1]) Haebler, *Op. cit.*, pag. 32.
([2]) Haebler, *Op. cit.*, pag. 36.
([3]) Haebler, *Op. cit.*, pag. 40.

É curioso lançar, ainda que passageiramente, a vista sobre as finanças espanholas, após o primeiro quartel do seculo XVI.

Em 1527, Carlos V cedeu aos genovezes certos impostos e concedeu-lhes licença de estabelecerem bancos em Medina, Villalon e Rioseco. Tendo Filippe II decretado, em 1575, que cessasse a obrigação de satisfazer aos credores estrangeiros os pagamentos devidos, isto abalou por tal forma o credito de Espanha, que o rei teve a maior difficuldade em encontrar quem lhe descontasse uma lettra em Flandres. As medidas tendentes a crear difficuldades e a extorquir aos estrangeiros a sua posição de financeiros em Espanha eram, porém, tão populares e tão agradaveis á nação, que ella se submettia bem aos inconvenientes resultantes de similhantes medidas.

Não podendo obter dinheiro dos banqueiros estrangeiros, Filippe II levantava nos pequenos banqueiros e negociantes espanhoes sommas destinadas a pagamentos nas grandes feiras, como, por exemplo, a de Medina. Chegada a occasião dos pagamentos n'essas feiras, como o erario real não podia fazer esses pagamentos, eram estes adiados para as feiras seguintes. D'ahi resultava grande incerteza e difficuldade geral nos negocios, que, juntamente com o augmento dos impostos, contribuiu para a rapida ruina da industria e do commercio espanhol ([1]).

Nos meiados do seculo XVI eram os genovezes os banqueiros da corte de Espanha e recebiam, além do lucro importantissimo das transacções, extraordinarios privilegios. Tinham liberdade de exercer a sua profissão de banqueiros em Espanha, apesar da lei que prohibia aos estrangeiros esse mister; eram eleitos para presidentes das principaes bolsas espanholas; era-lhes concedida a consignação do rendimento de certos impostos, tendo ainda o direito de os cobrar.

A par dos genovezes, eram os Fuggers *(Fucars)* de Augsburg que, desde 1525, tomavam logar importantissimo entre os banqueiros da corte de Espanha. N'esse anno, foram-lhes arrendados os *maestrazgos* das Ordens de Calatrava, Santiago e Alcantara, incluindo as minas de mercurio de Almodovar e de prata de Guadalcanal. Com essa concessão ficaram os Fuggers sendo se-

([1]) HAEBLER, *Die wirtschaftliche Blute Spaniens im 16 Jahrhundert*, pag. 72.

nhores do monopolio do mercurio, importantissimo para a explo ração das minas de prata do Mexico.

Nas côrtes de 1542, apontou-se que os genovezes estavam, de facto, na posse de monopolios no commercio das lãs, sedas, ferro, aço e viveres.

As guerras de Filippe II obrigavam a novas condescendencias com os banqueiros estrangeiros, que multiplicavam as suas exigencias. Sancho de Moncada calcula que sahissem de Espanha annualmente, ganhos por estrangeiros, cerca de 20 milhões de ducados de linhos, artigos de luxo, peixe, marmore, madeiras, etc.

Mais uma vez, temos de fallar dos judeus.

Continuava feroz, em Espanha, a obra sanguinaria da Inquisição; em Lisboa lavrava a peste, fazendo mortandade horrivel.

O fanatismo exacerbava o odio contra os judeus; havia sêde de sangue. No dia 9 de abril de 1506, um incidente occorrido na igreja de S. Domingos produziu a faisca, da qual se originou uma horrivel carnificina, que durou dois dias, porque ao terceiro, diz Damião de Goes, «já não achavam quem matar».

E assim se completou a obra de exclusão dos judeus de Portugal, obra que ficou assignalada na nossa historia por impereciveis laivos de sangue e na economia do paiz por innumeraveis prejuizos, de variada especie.

Á Hollanda, especialmente, foram levar as luzes do seu espirito e as riquezas da sua actividade; alli tiveram sempre uma posição saliente e alli conservaram, até ao principio do seculo XIX, o proprio uso da lingua portugueza.

Portugal, fascinado apenas pelos reflexos do ouro, não comprehendeu quanto essa riqueza tem de passageira e quanto mais solida é a que se funda no trabalho e no fomento da riqueza nacional.

Com a expulsão dos judeus coincidiu uma desorganisação administrativa, que conduziu á extrema decadencia as finanças nacionaes, multiplicando-se assombrosamente a divida publica.

«As coisas haviam chegado a termos, ainda antes de 1542, escreve Herculano, que as pessoas sisudas e experientes quasi de todo desanimavam. Nunca de memoria de homens tinha sido tão profunda a desorganisação da fazenda publica» [1].

---

[1] A. Herculano, *Historia da origem e estabelecimento da inquisição em Portugal*, t. 2.º, pag. 30.

Provocaram-se represalias de outras nações; d'ahi nasceu a desconfiança, que se reflectiu profundamente nos negocios em Portugal.

É certo, porém que, quando se deu o immenso revez de Alcacer-Quibir, quasi todas as casas illustres estavam pobres e a necessidade de aggravar os sacrificios feitos com os enormes gastos exigidos pelo resgate dos que gemiam em ferros, veiu esgotar os ultimos recursos.

A antiquissima instituição dos morgados favorecia a organisação da propriedade capitalista no seculo XVI.

Nas côrtes de Madrid, do anno de 1534 assentava-se «serem os morgados interessantes e uteis ao Estado, dignos de todo o favor» (1).

Esse parecer foi abraçado pelo legislador na nossa *Ordenação Filippina* (a *Affonsina* e a *Manuelina* não legislaram sobre morgados) onde se diz:

«A tenção dos grandes e fidalgos e pessoas nobres dos nossos reinos e senhorios, que instituem morgados de seus bens e os vinculam para andarem em seus filhos e descendentes... é para conservação e memoria do seu nome e accrescentamento dos seus Estados, casas e nobrezas e para que em todo o tempo se saiba a antiga linhagem d'onde procedem e os bons serviços que fizeram aos reis nossos predecessores e pelos quaes mereceram d'elles serem honrados e accrescentados, do que resulta grande proveito a estes reinos, para que n'elles hajam muitas casas e morgados, para melhor defensão e conservação dos ditos reinos e nos poderem os possuidores d'elles com mais facilidade servir e aos reis, que pelo tempo em diante nos succederem na coroa d'estes reinos» (2).

Lavrava uma geral mania de instituir vinculos em predios de ridiculos rendimentos, «em que, se não enchiam os fins, pelos quaes eram, apesar dos contrarios prejuizos com outra contrabalançada utilidade publica, que de taes insignificantes morgados não podiam resultar» (3).

Para obstar a esses erros foi promulgada uma lei em 1770, como adiante se verá.

(1) Lv. 7.ª, tom. 7.º, liv. 5.º
(2) *Ord. Filip.*, liv. IV, tit. 100, § 5.º
(3) SOUZA DE LOBÃO, *Tratado pratico de morgados*, pag. 25.

Offerece-se-nos considerar ainda uma nova entidade — a companhia de Jesus.

D. João III e D. Sebastião, especialmente, além da sua munificencia em dotar e engrandecer os jesuitas, tinham sido igualmente prodigos com outros religiosos, calculando alguns escriptores em tresentos e cincoenta os conventos de ambos os sexos fundados de novo desde D. Affonso V e sustentados a expensas dos bens da coroa e dos particulares e das rendas dos anniversarios, capellas e padroados.

Quem percorre os valiosos *Documentos para a historia dos jesuitas em Portugal*, colligidos pelo dr. ANTONIO JOSÉ TEIXEIRA, tem occasião de observar as concessões feitas á companhia de Jesus.

Eram dispensados de pagar aluguer algum das casas da Universidade, em que poisavam; podiam trazer lenha da mata de Botão; foi-lhes licito vedar um caminho, da porta do castello de Coimbra para a parte nova «sem embargo de quaesquer leis, ordenações ou posturas da camara da dita cidade, em contrario» (1); mandou-se expropriar casas para desobstruir o terreno destinado á construcção do collegio (2); permittiu-se que os jesuitas mandassem comprar em qualquer parte e levar para Coimbra todo o trigo, cevada, centeio, milho e quaesquer outros mantimentos e coisas de que tivessem necessidade (3); facultando os olivaes de Coimbra e outros para nelles poderem pastar até tresentos carneiros, sem pagarem coima nem pena alguma, mas apenas o damno e perda que fizessem (4).

Foram valiosissimos os privilegios outhorgados aos jesuitas. D. João III concedeu-lhes que «tenham, gosem e usem d'aqui em diante de todos os privilegios, liberdades, graças e franquezas, que de mim teem, e de que usam, e ao diante pudérem gosar e usar, os lentes e deputados e conselheiros da Universidade da dita cidade de Coimbra» (5). Foi concedido que as rendas do collegio dos jesuitas se arrecadassem e executassem pela

(1) ANTONIO JOSÉ TEIXEIRA, *Documentos para a historia dos jesuitas em Portugal*, pag. 127.
(2) A. J. TEIXEIRA, *Op. cit.*, pag. 137.
(3) A. J. TEIXEIRA, *Op. cit.*, pag. 149.
(4) A. J. TEIXEIRA, *Ob. cit.*, pag. 161.
(5) A. J. TEIKEIRA, *Ob. cit.*, pag. 169.

forma por que os almoxarifes e recebedores arrecadavam e executavam as dividas da fazenda real ([1]). Não faltou a concessão de terras. Por Filippe I foi confirmada a carta de D. Henrique isentando as casas e collegios da companhia de Jesus de ciza dos bens de raiz, que «comprarem e venderem, ou escambarem, e as partes com quem as ditas compras ou escambos fizessem, pagariam sua meia ciza, se a devessem, e bem assim que não pagassem ciza do pão, vinho, azeite, carnes, pescado, bestas nem de qualquer outro movel, que comprassam, vendessem ou escambassem que fossem para meneio e uso do collegio, nem a pagassem as partes, que estas cousas vendessem, comprassem ou com quem as escambassem» ([2]).

Igualmente foram os jesuitas isentos de pagar dizimas das suas propriedades, que elles por si e seus familiares e ás suas proprias custas grangeassem e, grangeando-as por lavradores parciarios, eram isentos da parte que levassem por via de conta ([3]).

Taes e tantos privilegios não vinham aos jesuitas apenas dos reis; provinham-lhes tambem dos bispos.

Concessão de elevado alcance foi a que D. Sebastião fez, mandando unir e incorporar os collegios das Artes e de Jesus á Universidade de Coimbra e que os reitores, padres e collegiaes d'elles e seus criados, familiares e pessoas, que os servissem e d'elles tivessem mantimento e ordenado gosassem e usassem os privilegios, liberdades, graças e franquezas outhorgadas á Universidade ([4]).

Ponhamos de parte os privilegios de caracter scientifico, por não interessarem directamente ao estudo que fazemos, bastando dizer que mais de um alvará regio obrigou a Universidade a reconhecer as habilitações adquiridas nos institutos dos jesuitas.

As doações feitas foram muito valiosas: consistiam em terras, agua, dinheiros, assucar e outros generos e até especiarias e incenso da casa da India, não faltando «um escravo para serviço do dito collegio, de que faço esmola» ([5]) bem como livrarias, pannos de armar, etc.

([1]) A. J. Teixeira, *Ob. cit.*, pag. 176.
([2]) A. J. Teixeira, *Ob. cit.*, pag. 184.
([3]) A. J. Teixeira, *Ob. cit.*, pag. 187.
([4]) A. J. Teixeira, *Ob. cit.*, pag. 198.
([5]) A. J. Teixeira, *Ob. cit.*, pag. 263.

Com tantos e tão valiosos elementos, não é para admirar que os jesuitas se engrandecessem em importancia e bens, conquistando uma influencia consideravel na sociedade portugueza, principalmente na segunda metade do seculo XVI e na primeira metade do seculo XVII.

(Continúa).

BIBLIOGRAPHIA

Visite de Sa Majesté Charles 1.er, Roi de Portugal et des Algarves, et de M. de Président de la République française au Muséum National d'Histoire naturelle le 24 novembre 1905. Paris, MDCCCCVI.

É bem sabido pelos leitores d'esta revista que, quando, no fim do anno passado, S. M. El-Rei o Senhor D. Carlos visitou em Paris o Senhor Presidente da Republica franceza, das solemnidades e festas que foram celebradas em sua honra fez parte uma sessão no Museu de Historia natural d'aquella capital, a que concorreu o que em França existe de mais elevado na politica, nas sciencias, nas lettras, etc. O governo francez, conhecendo que coisa alguma poderia ser mais agradavel a um rei que consagra ao estudo das sciencias naturaes muito do tempo que lhe fica livre das suas altas funcções, do que ver-se cercado dos principes da sciencia franceza, n'essa casa celebre na historia das sciencias physico-naturaes, e ouvir da boca de alguns dos mais eminentes a narração das suas mais brilhantes descobertas, incluiu muito judiciosamente esta sessão no programma das solemnidades realisadas em honra do chefe da nação portugueza. Foi uma sessão memoravel esta, que ficará inscripta na chronica do nosso actual monarcha entre os acontecimentos mais notaveis do seu reinado.

O livro cujo titulo antecede esta noticia contém os discursos e conferencias pronunciadas n'essa occasião. Abre por uma elequente allocução do director do Museu, M. Ed. Perrier, em que sauda o monarcha portuguez e em que se refere aos trabalhos scientificos do Senhor D. Carlos com louvores a que dá grande valor a auctoridade do naturalista eminente que os exprimiu.

Vem depois o bello discurso pronunciado pelo rei de Portugal, em resposta á allocução precedente, na qual este em termos ca-

lorosos e em phrases expressivas agradece a recepção que se lhe está fazendo e sauda os homens eminentes que são a gloria do grande estabelecimento scientifico que veio visitar.

Seguem-se as cinco conferencias que foram feitas n'essa occasião por M.^{me} Curie e por MM. H. Becquerel, Lippmann, Lacroix e Moissan. São todas curtas, mas extremamente instructivas e vivamente interessantes; e foram quasi todas acompanhadas de experiencias, ou de observações de resultados colhidos em experiencias anteriores, relativas aos phenomenos a que ellas se referem.

Abriu esta série de conferencias H. Becquerel, herdeiro de um grande nome, que, continuando os trabalhos de seu illustre pae sobre a phosphorescencia, descobriu os raios cathodicos, que constituem o assumpto sobre o qual fallou.

A segunda conferencia foi feita pela esposa e collaboradora de Curie, o physico eminente cuja morte prematura e inesperada, em tragicas circunstancias, deploram os homens de sciencia de todo o mundo, a qual se occupou do *radium*, esse corpo maravilhoso que parece destinado a representar um papel importantissimo na sciencia do futuro.

Fallou depois Lippmann, o inventor da photographia das cores, o qual se occupou d'esta importante descoberta.

A quarta conferencia foi feita por Lacroix, o arrojado geologo, que foi estudar á Martinica a desastrosa erupção da montanha Pelé e, quando não tinham ainda terminado os seus effeitos destruidores, o qual se occupou das observações que fez n'esta notavel viagem.

A ultima conferencia foi feita por Moissan, o inventor do forno electrico, que se occupou d'este apparelho utilissimo, que tem dado a solução de muitos problemas importantes de physica.

Esta ultima conferencia é conhecida pelos leitores d'esta revista, porque o eminente chimico que a pronunciou nos deu o prazer de nos confiar o seu manuscripto para ser n'ella publicado.

L. Octavio de Toledo: *Elementos de Aritmetica universal.* (Parte 1.ª). Madrid, 1903.

—— *Tratado de Algebra*, t. I. Madrid, 1905.

A cultura das Mathematicas tem tomado modernamente bas-

tante desonvolvimento em Hespanha, onde têem sido publicadas nos ultimos tempos valiosas obras para o ensino d'estas sciencias, como se pode ver em diversos numeros do *Jornal de Siencias mathematicas*, onde se deu noticia de algumas. Hoje vamos indicar outras, principiando por aquellas cujos titulos vêem de ser escriptos.

A primeira abre por uma curta, mas bem feita, introducção, consagrada ás ideias primordiaes das Sciencias mathematicas, e, em particular, da Arithmetica. Depois são estudadas em vinte e dois capitulos a theoria das operações sobre numeros e sobre polynomios, as regras para o seu calculo, etc.

A theoria geral das operações é nella feita com muito cuidado, o que permitte ao auctor dar toda a clareza e rigor á extensão successiva da noção de numero, na passagem do inteiro para o fraccionario, do positivo para o negativo, do racional para o irracional, do real para o imaginario.

O segundo dos volumes mencionados é o primeiro de uma obra em que o auctor pretende expôr com desenvolvimento as theorias classicas da Algebra. N'elle occupa-se o sabio professor da Universidade de Madrid da parte elementar d'esta sciencia, estudando primeiramente, em uma introducção, a noção de limite e os principios geraes da theoria das funcções e da theoria das equações, depois, no livro primeiro, a doutrina relativa á resolução das equações do primeiro grão; no segundo, a doutrina relativa á resolução das equações do segundo grão; e, no terceiro, os principios da theoria das congruencias e da analyse indeterminada. A theoria das equações do primeiro grão é tratada de um modo mais completo do que é habitual em outras obras d'esta natureza, considerando-se sempre as equações debaixo da sua forma mais geral, o que tem a vantagem de habituar os alumnos ao calculo com quantidades que, por ser o seu numero indeterminado, não podem ser todas escriptas, tendo de a imaginação intervir para trabalhar com as que faltam.

Tanto na primeira como na segunda d'estas obras a exposição é feita com clareza, rigor e elegancia. Porisso não terminaremos esta breve noticia sem exprimir o nosso vivo desejo de que appareça brevemente a segunda parte da primeira e os restantes volumes da outra.

Zoel G. de Galdeano: *Tratado de Analisis matematico.* Zaragoza.

O auctor d'esta obra é um dos mathematicos hespanhoes que mais tem trabalhado para attrair a attenção dos seus compatriotas para o estudo das sciencias mathematicas. Para isso, fundou o primeiro jornal especialmente consagrado a estas sciencias que existiu n'aquelle paiz, escreveu diversas obras para uso dos alumnos que querem apprender os primeiros elementos das referidas sciencias e alguns artigos sobre a philosophia e ensino das mesmas, e anda agora publicando uma obra extensa sobre Analyse mathematica, com o fim de divulgar em Hespanha as doutrinas com que esta parte das mathematicas foi enriquecida por alguns dos mais eminentes geometras do seculo IX.

A obra constará de sete volumes. Os quatro primeiros appareceram em 1904 e 1905, e vamos dar uma noticia resumida dos assumptos que n'elles são considerados.

Entendeu o sr. Galdeano, com muita razão, que, para tornar a leitura da sua obra accessivel ao maior numero possivel de leitores, convinha estudar ligadamente os assumptos de Analyse desde os principios mais elementares até ás questões de natureza um pouco elevada que se téem tornado classicas nos ultimos tempos, e que pretende tornar conhecidas no seu paiz. Por isso consagrou o 1.° volume á exposição da parte do Calculo differencial que se encontra nos manuaes ordinariamente empregados para o estudo elementar d'esta parte das Mathematicas.

O tomo 2.° é consagrado á exposição dos principios geraes da theoria das funcções. Como introducção a esta doutrina é primeiramente estudada a theoria dos numeros irracionaes e a theoria dos numeros complexos com n unidades; depois é considerada a theoria da continuidade e da integrabilidade das funções de variaveis reaes; e finalmente é estudada a theoria das funcções analyticas pelos methodos de Cauchy, Riemann e Weierstrass.

O tomo 3.° abre por uma bella introducção historica sobre o emprego do infinito e do imaginario em Geometria, á qual se segue um interessante capitulo consagrado á Pangeometria. Depois é estudada com bastante desenvolvimento e forma muito moderna a theoria infinitesimal das curvas planas.

O tomo 4.° é consagrado ao Calculo integral e ás suas appli-

cações á theoria geral das funcções, e, em particular, á theoria das funcções eulerianas e das funcções ellipticas.

A esta noticia muito succinta ajuntaremos que esta obra faz parte de uma *Encyclopedia Mathematica*, que o sr. Galdeano se propõe publicar, e que constará de mais quatro volumes, respectivamente consagrados á theoria dos numeros, á theoria dos grupos de substituições, ás applicações geometricas do calculo infinitesimal e á integração das equações differenciaes.

C. A. Laisant: *Initiation mathématique.* Paris, 1906.

Os processos que ordinariamente se empregam para o primeiro ensino das mathematicas ás crianças, dando-lhe definições abstractas e regras que ellas decoram sem as comprehender, são mais proprios para as torturar do que para lhes despertar o gosto pelo estudo d'estas sciencias. D'isto nasce a repugnacia prejudicial que muitas d'ellas adquirem contra estas sciencias tão uteis e tão interessantes, e mesmo em muitas, aliás intelligentes, a falsa opinião de que não têem aptidão para o seu estudo.

Para combater este defeito fundamental do ensino, vem o sr. Laisant de publicar um opusculo precioso e extremamente interessante, onde apresenta um modelo para a iniciação dos estudos mathematicos, por meio do qual se sobe gradualmente por um caminho intuitivo até ás noções abstractas de que é formada esta sciencia, acompanhando a exposição de successivos exemplos muito proprios para interessar as crianças e mesmo para as recrear. Os assumptos considerados são muitos e variados e referem-se aos principios da Arithmetica, da Algebra, da Geometria elementar e da Geometria analytica, e são tratados com uma clareza admiravel e sob uma forma das mais attrahentes. É um livro excellente, que devem ler todos os que têem por missão o primeiro ensino das crianças, e um modelo que devem ter presente aquelles que pretendem escrever livros para o primeiro ensino das mathematicas.

Verhandlungen der dritten internationalen Mathematiker-Congresses in Heidelberg. Leipzig, 1905.

Refere-se este bello e importante volume ao Congresso internacional dos mathematicos que teve logar em Heidelberg em agosto de 1904, e foi publicado sob a direcção do sabio secretario do mesmo Congresso, dr. **Krazer**, professor na Escola technica superior de Karlsruhe. Contém em primeiro logar a noticia do que n'elle se passou de mais notavel. Depois vem uma conferencia extremamente interessante feita por **Königsberger**, professor na Universidade de Heidelberg, sobre a vida e a obra scientifica de **Jacobi**, commemorando por este meio o primeiro centenario do nascimento d'este grande geometra, que teve logar em 1804. A esta conferencia seguem-se tres outras, uma por **Painlevé** sobre o problema moderno da integração das equações differenciaes, outra por **Greenhill** sobre a theoria mathematica do movimento do pião, considerada historicamente, outra de **Segre** sobre a Geometria de hoje e a sua ligação com a Analyse; e depois vêem numerosos trabalhos apresentados ás secções em que se desdobrou o Congresso, sobre diversos pontos importantes das sciencias mathematicas, entre os quaes ha muitos que são firmados por alguns dos geometras mais eminentes do nosso tempo. Contém finalmente o livro uma noticia sobre a exposição de obras e instrumentos mathematicos que teve logar em Heidelberg na occasião do Congresso.

R. **Marcolongo**: *Meccanica razionale*. Milano, U. Hoepli, 1905.

Em um artigo que publicámos no tomo XV do *Jornal de Sciencias mathematicas* em 1902 dissemos nós, em noticia relativa a uma obra do sr. **Marcolongo** que continha o curso sobre Mecanica por elle dado na Universidade de Messina, as palavras seguintes: «nota-se n'este livro a boa escolha dos assumptos, a clareza, rigor e simplicidade inexcediveis com que são expostos, a boa ordem em que estão encadeados, e a fórma elegante, moderna e muitas vezes original das demonstrações».

Estas justas palavras são naturalmente applicaveis, e mesmo

com mais razão, á presente obra, consagrada ao mesmo assumpto, que recebeu os melhoramentos sugeridos ao seu sabio auctor por mais continuada experiencia do ensino e mais repetida meditação dos assumptos n'ella tratados.

A obra faz parte da excellente collecção do *Manuali Hoepli*, que veio enriquecer, e é composta de dois volumes.

O primeiro d'estes volumes é consagrado á Cinematica e á Statica. Abre por um capitulo consagrado á Geometria vectorial, da qual o auctor faz muito uso; depois no capitulo 2.° são estudadas as noções de velocidade e acceleração, no capitulo 3.° a theoria dos movimentos finitos dos systemas rigidos, no 4.° e 5.°, respectivamente, a theoria do movimento instantaneo e a do movimento continuo dos mesmos systemas. Segue depois a Statica em tres capitulos, um consagrado á composição das forças, outro ao principio dos trabalhos virtuaes e outro ao equilibrio das curvas funiculares.

O segundo volume é destinado á Dynamica e aos principios da Hidrodynamica. É dividido em sete capitulos, onde são considerados os assumptos seguintes: I As tres leis fundamentaes do movimento. II Problemas particulares do movimento de um ponto. III Principio de d'Alembert e equações geraes da Mecanica. IV Theoremas geraes sobre o movimento de um systema. V Dinamica dos systemas rigidos. VI Attracção das ellipsoides e theoremas geraes sobre a funcção potencial newtoniana. VII Principios da Mecanica dos fluidos.

Acompanham o livro e concorrem para o valorisar numerosos e interessantes exercicios e muitas indicações historicas.

Terminaremos esta rapida noticia com as palavras seguintes, que haviamos escripto em 1902 a respeito da obra a que nos referimos no principio d'ella: «Os professores de Mecanica das nossas escolas superiores poderão, temos a certeza d'isso, tirar proveito da leitura d'esta obra, onde encontrarão questões que os hão de interessar, demonstrações e modos de expôr que poderão aproveitar. Aos alumnos das mesmas escolas pode ella tambem prestar serviços como auxiliar do seu estudo».

G. T.

CENTRE DE GRAVITÉ DU TEMPS DE PARCOURS

PAR

M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE

Membre de l'Institut de France
Inspecteur général des mines
Grand-officier de la Légion d'Honneur.

I

1. Supposons qu'un mobile soit doué d'un pouvoir émissif qui s'exerce proportionnellement au temps. Il laissera le long de sa trajectoire une imprégnation, variable en chaque point en raison inverse de la vitesse. Cette courbe deviendra ainsi un système matériel, dont on peut se proposer de déterminer le centre de gravité.

Sur des éléments consécutifs de même longueur ds, l'émanation s'accumulant en raison du temps employé à les franchir, on pourra la mesurer par ce temps dt lui même. Nous désignerons d'après cela le point en question sous le nom de *centre de gravité du temps de parcours*.

Cette note est destinée à en présenter quelques exemples.

2. Envisageons d'abord, comme le plus simple, le mouvement parabolique effectué librement sous l'action de la pesanteur.

En supposant un tir horizontal avec la vitesse V, on a:

$$x = Vt, \quad t = \frac{x}{V}, \quad dt = \frac{dx}{V},$$

$$y = \frac{1}{2} gt^2 = \frac{gx^2}{2V^2},$$

et pour les moments M_x, M_y, relatifs aux axes de coordonnées:

$$dM_y = xdt = \frac{xdx}{V}, \quad dM_x = ydt = \frac{gx^2dx}{2V^3},$$

$$M_y = \frac{x^2}{2V}, \quad M_x = \frac{gx^3}{6V^3},$$

d'où les coordonnées X, Y du centre de gravité cherché:

$$X = \frac{M_y}{t} = \frac{x}{2}, \quad Y = \frac{M_x}{t} = \frac{gx^2}{6V^2} = \frac{y}{3},$$

proportionnelles à celles du mobile lui-même.

Le lieu géométrique de ce centre a dès lors pour équation:

$$(3Y) = \frac{g}{2V^2}(2X)^2, \quad Y = \frac{2g}{3V^2}X^2.$$

Elle représente une parabole, dont le paramètre est les $\frac{3}{4}$ du précédent.

3. Considérons en second lieu le mouvement elliptique résultant de la projection orthogonale d'un mouvement circulaire uniforme.

Prenons le rayon comme unité de longueur, et, pour unité de vitesse angulaire, celle de la rotation. L'arc décrit aura dès lors pour valeur t. Les coordonnées du point décrivant seront, dans le plan du cercle, $\cos t$ et $\sin t$. Dans le plan de l'ellipse, l'abscisse

parallèle à l'intersection ne change pas. L'ordonnée du mobile devient $a \sin t$, si a désigne le cosinus de l'angle dièdre:

$$x = \cos t, \quad y = a \sin t,$$

$$t = \operatorname{arc} \cos x, \quad dt = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$dM_y = x dt = -\frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$M_y = \int_1^x \frac{-2x dx}{2\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}.$$

$$dM_x = y dt = -a\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -a dx,$$

$$M_x = \int_1^x (-a dx) = a(1-x).$$

et enfin:

$$X = \frac{M_y}{t} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\operatorname{arc} \cos x}, \quad Y = \frac{M_x}{t} = \frac{a(1-x)}{\operatorname{arc} \cos x}.$$

4. Cherchons en coordonnées polaires r, θ, l'équation du lieu des centres de gravité.

On a d'abord:

$$\operatorname{tang}^2 \theta = \frac{Y^2}{X^2} = a^2 \frac{1-x}{1+x},$$

$$x = \frac{a^2 - \operatorname{tang}^2 \theta}{a^2 + \operatorname{tang}^2 \theta}.$$

En second lieu:

$$r^2 = X^2 + Y^2 = \frac{(1+a^2) - 2a^2 x - (1-a^2) x^2}{(\operatorname{arc} \cos x)^2},$$

d'où:

$$r^2 (\operatorname{arc\,cos} x)^2 (a^2 + \operatorname{tang}^2\theta)^2 =$$

$$(1+a^2)(a^2+\operatorname{tang}^2\theta)^2 - 2a^2(a^4-\operatorname{tang}^4\theta) - (1-a^2)(a^2-\operatorname{tang}^2\theta)^2$$

$$= 4a^2 \operatorname{tang}^2\theta\,(1+\operatorname{tang}^2\theta) = \frac{4a^2\sin^2\theta}{\cos^4\theta},$$

et en extrayant la racine carrée:

$$r\,(a^2\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{a^2\cos^2\theta - \sin^2\theta}{a^2\cos^2\theta + \sin^2\theta}\right) = 2a\sin\theta\,.$$

II

5. Ce problème nous présente un exemple du mouvement d'un point libre sous l'influence d'une force centrale, qui est dans ce cas proportionnelle à la distance.

D'une manière générale, un tel mouvement, quelle que soit la loi d'attraction, reste subordonné à la loi des aires:

$$\frac{\frac{1}{2}r^2\,d\theta}{A} = \frac{dt}{t},$$

si A désigne l'aire décrite dans le temps t:

$$A = \frac{1}{2}\int r^2\,d\theta\,.$$

On a donc:

$$dt = \frac{t}{2A}\,.\,r^2\,d\theta\,,$$

$$dM_y = x\,dt = \frac{t}{2A}\,.\,r^3\cos\theta\,d\theta\,,$$

$$dM_x = y\,dt = \frac{t}{2A}\,.\,r^3 \sin\theta\, d\theta\,,$$

$$M_y = \frac{t}{2A}\int r^3 \cos\theta\, d\theta\,, \quad M_x = \frac{t}{2A}\int r^3 \sin\theta\, d\theta\,,$$

et enfin:

$$(1) \qquad X = \frac{M_y}{t} = \frac{1}{2A}\int r^3 \cos\theta\, dt\,, \quad Y = \frac{M_x}{t} = \frac{1}{2A}\int r^3 \sin\theta\, d\theta\,.$$

6. Prenons, comme exemple d'application de ces formules générales, la spirale logarithmique:

$$r = e^{\theta \cot a}\,,$$

pour laquelle la force est inversement proportionnelle au cube de la distance au pôle.

Nous compterons ses arcs à partir de ce point. L'aire a dès lors pour valeur:

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\theta} r^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\theta} e^{2\theta \cot a}\, d\theta = \frac{\operatorname{tang} a}{2}\, e^{2\theta \cot a}\,.$$

On a donc, d'après la première des formules (1):

$$2AX = \int_{-\infty}^{\theta} e^{3\theta \cot a} \cos\theta\, d\theta\,,$$

ou, en posant pour simplifier:

$$3 \cot a = \cot b\,,$$

$$2AX = \int_{-\infty}^{\theta} e^{\theta \cot b}\, d\theta = e^{\theta \cot b} \cos(\theta - b) \sin b\,,$$

$$X = \frac{e^{3\theta \cot a} \cos(\theta - b) \sin b}{e^{2\theta \cot a} \operatorname{tang} a} = r \sin b \cot a \cos(\theta - b)\,.$$

On obtiendrait de même:

$$Y = r \sin b \cot a \sin(\theta - b).$$

7. Nous pouvons déterminer le lieu géométrique du centre de gravité du temps de parcours.

Designons par r', θ' ses coordonnées polaires, il viendra:

$$\operatorname{tang}\theta' = \frac{Y}{X} = \operatorname{tang}(\theta - b), \quad \theta' = \theta - b, \quad \theta = \theta' + b,$$

et en second lieu:

$$r' = \sqrt{X^2 + Y^2} = r \sin b \cot a = e^{(\theta' + b)\cot a} \sin b \cot a.$$

Posons encore:

$$e^{c \cot a} = e^{b \cot a} \sin b \cot a,$$

nous aurons:

$$r' = e^{(\theta' + c)\cot a} = e^{\theta'' \cot a},$$

si nous prenons $\theta'' = \theta' + c$, en faisant tourner de l'angle c l'axe polaire.

Concluons que le lieu cherché est une spirale logarithmique égale, tournée d'un certain angle [1].

8. Les intégrations des formules (1) peuvent encore s'effectuer dans les divers cas suivants: 1.° sections coniques rapportées au foyer (force en raison inverse du carré de la distance); 2.° cercle rapporté à l'un de ses points (force en raison inverse

---

[1] Si l'on résolvait numériquement par rapport à a l'équation transcendante: $c = 2k\pi$, on obtiendrait des spirales spéciales qui renferment en elles-mêmes tous leurs centres de gravité du temps de parcours suivant la loi des aires.

de la cinquième puissance de la corde); 3.° limaçon de Pascal (force en raison inverse de la quatrième puissance de la distance). Mais je ne m'attarderai pas à ces développements.

III

9. Passons maintenant au cas des liaisons, et considérons un mobile assujetti à parcourir sous l'action de la gravité une courbe donnée dans un plan vertical.

Nous en prendrons l'équation sous la forme:

$$x = f(z),$$

en choisissant comme axe des abscisses le niveau de vitesse nulle, et adoptant des ordonnées *plongeantes* z.

Le théorème des forces vives donne dans ces conditions:

$$v^2 = 2gz = \frac{ds^2}{dt^2},$$

$$\sqrt{2g}\,dt = \frac{ds}{\sqrt{z}},$$

$$ds = dz\sqrt{1 + f'^2(z)},$$

$$\sqrt{2g}\,dt = dz\sqrt{\frac{1 + f'^2(z)}{z}}$$

d'où, en multipliant respectivement par x et z:

$$\sqrt{2g}\,d\mathrm{M}_z = dz\,.\,f(z)\sqrt{\frac{1 + f'^2(z)}{z}},$$

$$\sqrt{2g}\,d\mathrm{M}_x = dz\sqrt{z\left[1 + f'^2(z)\right]},$$

et en divisant membre à membre:

$$X = \frac{M_z}{l} = \frac{\int_0^z f(z)\sqrt{\frac{1+f'^2(z)}{z}}\,dz}{\int_0^z \sqrt{\frac{1+f'^2(z)}{z}}\,dz},$$

$$Z = \frac{M_x}{l} = \frac{\int_0^z \sqrt{z[1+f'^2(z)]}\,dz}{\int_0^z \sqrt{\frac{1+f'^2(z)}{z}}\,dz}.$$

Telles sont les formules générales qui résolvent la question.

10. Si l'on prend, pour les appliquer, la seconde parabole cubique:

$$x = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}, \quad 1 + f'^2(z) = z + 1,$$

les trois intégrales deviennent:

$$\sqrt{2g}\, l = \int_0^z \sqrt{\frac{z+1}{z}}\,dz$$

$$= 2\sqrt{z(z+1)} + \mathrm{Log}\left[1 + 2z + 2\sqrt{z(z+1)}\right],$$

$$\sqrt{2g}\, M_z = \frac{2}{3}\int_0^z z\sqrt{z+1}\,dz$$

$$= \frac{4}{45}\left[(3z-2)(z+1)^{\frac{3}{2}} + 2\right],$$

$$\sqrt{2g}\, M_x = \int_0^z \sqrt{z(z+1)}\,dz$$

$$= \frac{(2z+1)\sqrt{z(z+1)}}{4} - \frac{1}{8}\,\mathrm{Log}\left[1 + 2z + 2\sqrt{z(z+1)}\right].$$

Les intégrations réussiraient de même avec une vitesse initiale et un point de départ quelconque, mais elles deviennent plus compliquées et je m'abstiens de les transcrire.

11. Envisageons le pendule cycloidal, c'est-à-dire (fig. 1) la

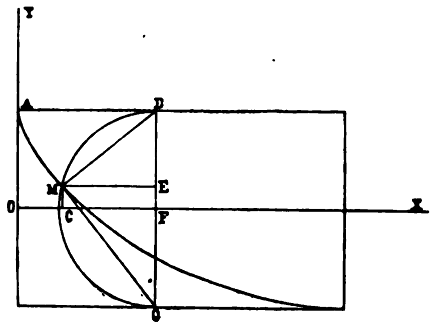


Fig. 1

cycloide renversée, rapportée aux axes OX et OY.

On a, pour l'abscisse du point M:

$$x = \mathrm{OC} = \mathrm{AD} - \mathrm{ME},$$

$$\mathrm{AD} = \operatorname{arc} \mathrm{MD} = \operatorname{arc} \cos \mathrm{FE} = \operatorname{arc} \cos y,$$

$$\mathrm{ME} = \sqrt{\mathrm{ED} . \mathrm{EG}} = \sqrt{(1-y)(1+y)},$$

et par conséquent, comme équation de la trajectoire:

$$x = \operatorname{arc} \cos y - \sqrt{1 - y^2}. \tag{2}$$

Nous supposerons que le mobile part sans vitesse du point de rebroussement:

$$v^2 = 2g(1-y) = \frac{ds^2}{dt^2},$$

$$\sqrt{2g}\, dt = \frac{ds}{\sqrt{1-y}}.$$

L'arc cycloidal comprise entre M et le sommet est le double de la tangente MG, qui est elle-même moyenne proportionnelle entre GD et GE:

$$s = 2\sqrt{2(1+y)}.$$

Comme d'ailleurs ds est négatif:

$$ds = -\frac{\sqrt{2}\,dy}{\sqrt{1+y}},$$

$$\text{(3)} \qquad \sqrt{g}.dt = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$t\sqrt{g} = -\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arccos y.$$

En multipliant les deux membres de l'équation (3) par x (2), il vient:

$$\sqrt{g}\,dM_y = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\left[\arccos y - \sqrt{1-y^2}\right] = dy - \frac{\arccos y}{\sqrt{1-y^2}}dy,$$

$$\sqrt{g}\,M_y = y - 1 + \int_1^y \arccos y.d(\arccos y) = y - 1 + \frac{1}{2}(\arccos y)^2.$$

En multipliant au contraire par y:

$$\sqrt{g}\,dM_x = -\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$\sqrt{g}\,M_x = -\int_1^y \frac{2ydy}{2\sqrt{1-y^2}} = \sqrt{1-y^2}.$$

On déduit de là:

$$X = \frac{M_y}{t} = \frac{y-1}{\arccos y} + \frac{\arccos y}{2},$$

$$Y = \frac{M_x}{t} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\arccos y}.$$

La recherche du lieu géométrique des centres de gravité du temps de parcours du pendule cycloidal (c'est à-dire l'élimination entre ces deux relations de y, ou plus simplement de $\omega = \frac{1}{2}\arccos y$) peut se ramener à la résolution d'une équation du troisième degré en ω.

12. Le pendule circulaire, malgré sa simplicité apparente, est, comme on le sait, d'une nature plus compliquée au point de vue dynamique que le pendule cycloidal. Des trois intégrales t, M_x, M_z, les deux premières sont alors elliptiques; mais la troisième reste élémentaire, et peut s'interpréter très simplement.

On a en effet, en appelant α l'écart du pendule par rapport à la verticale, avec un point de départ quelconque M_0:

$$v^2 = 2g(z - z_0),$$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(z-z_0)}} = \frac{-d\alpha}{\sqrt{2g(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}},$$

$$dM_z = x\,dt = \sin\alpha \,.\, dt = \frac{-\sin\alpha\, d\alpha}{\sqrt{2g(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}} = \frac{d(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}{\sqrt{2g(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}},$$

$$M_z = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{\cos\alpha - \cos\alpha_0} = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{z - z_0}.$$

Imaginons que l'arc de cercle matériel engendre par sa révolution une zône sphérique de même densité que lui sur les différents parallèles. La masse de la zône de hauteur $z - z_0$ sera

précisement $2\pi M_z$. On voit d'après cela qu'elle est en raison de la racine carrée de cette hauteur, ou, en d'autres termes, de la moyenne géométrique entre celle-ci et le rayon; tandis que la surface de la zône homogène est proportionnelle à la hauteur elle-même.

13. Le centre de gravité de cette zône se trouvant nécessairement sur l'axe de révolution, condensons en leurs centres respectifs les masses des zônes infinitésimales, de manière à constituer une droite matérielle de même centre de gravité que la zône considérée dans son ensemble.

La masse totale étant représentée par $\sqrt{h}$, sa différentielle est $\frac{dh}{2\sqrt{h}}$, le moment élémentaire par rapport au plan de la base supérieure $\frac{dh}{2\sqrt{h}} \cdot h = \frac{1}{2}\sqrt{h}\,dh$, et le moment total $\frac{1}{3}h^{\frac{3}{2}}$. La distance du centre cherché à ce plan sera donc $\frac{h}{3}$, tandis qu'elle est $\frac{h}{2}$ pour la zône homogène.

IV

14. Parfois, en cinématique, on fournit immédiatement *l'équation du mouvement sur la trajectoire*:

$$t = f(s),$$

qui relie le temps t à l'arc s de cette ligne, directement donnée.

Il peut alors devenir avantageux de représenter cette courbe à l'aide de ses *coordonnées intrinsèques:* arc s et angle de contingence ω:

$$s = \varphi(\omega), \quad ds = \varphi'(\omega)\,d\omega.$$

Pour la recherche, dans ces conditions, du centre de gravité du temps de parcours, prenons comme axes des abscisses et des ordonnées la tangente et la normale au point O de la trajectoire

qui forme l'origine des angles (fig. 2). Nous aurons, en intégrant

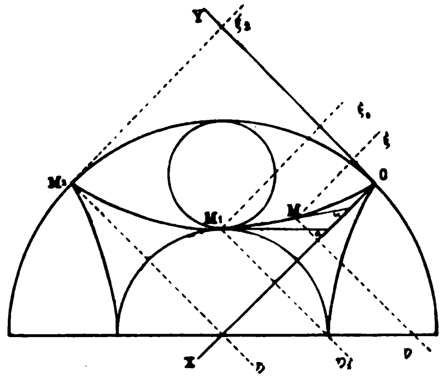


Fig. 2

par parties:

$$dM_y = xdt\,,$$

$$M_y = \int_0^\omega xdt = xt - \int_0^\omega tdx\,,$$

car le terme xt disparait pour la limite inférieure de l'intégration, qui annule à la fois ses deux facteurs. On a donc:

$$Xt = xt - \int_0^\omega t\,.\,ds \cos\omega\,,$$

$$X = x - \frac{1}{t}\int_0^\omega f(s)\,.\,\varphi'(\omega)\,d\omega\,.\cos\omega\,.$$

Imaginons, pour simplifier, des axes $M\xi$, $M\eta$ parallèles aux premiers, mais dirigés dans des sens précisément opposés, et menés par le point mobile, qui leur sert lui-même d'origine. On aura:

$$\xi = x - X\,,\quad \eta = y - Y\,,$$

c'est-à-dire:

$$\xi = \frac{1}{f[\varphi(\omega)]}\int_0^\omega f[\varphi(\omega)]\,\varphi'(\omega)\cos\omega\,d\omega\,, \tag{4}$$

et de même:

$$(5) \qquad \eta = \frac{1}{f[\varphi(\omega)]} \int_0^{\alpha} f[\varphi(\omega)]\, \varphi'(\omega) \sin \omega \, d\omega .$$

15. Pour présenter une application de ces formules générales, choisissous comme courbe l'épicycloide:

$$s = S\left(1 - \cos \frac{\pi \omega}{2\alpha}\right),$$

rapportée à l'un de ses points de rebroussement O (fig. 2). Les coordonnées de son sommet M_1 sont S et α; celles du rebroussement M_2 : 2S et 2α.

Envisageons d'autre part, comme loi de mouvement, l'isochronisme, qui constitue l'une des propriétés les plus remarquables de ces courbes (1). Désignons pour un instant par σ l'arc M_1M compté à partir du sommet dans la direction du rebroussement O:

$$\sigma = S - s .$$

L'équation du mouvement isochrône sur la trajectoire est:

$$\sigma = \sigma_0 \cos \frac{\pi t}{2T},$$

et donne $t = T$ pour $\sigma = 0$, quelle que soit la distance σ_0 du point de départ. Mais, pour la recherche actuelle, nous supposerons spécialement l'oscillation *complète*, dans laquelle le mobile part du point de rebroussement sans vitesse initiale.

---

(1) Elle est connue depuis longtemps pour les conditions ordinaires. Je l'ai étendue (*Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. XIII, pag. 204) au cas du frottement de glissement avec milieu résistant. Mais ici je me réduirai au mode classique, en supprimant ces obstacles, et ramenant dès lors au sommet de l'épicycloide (d'où le déplacent les résistances) le centre de tautochronisme.

Faisons donc $\sigma_0 = S$, il viendra:

$$S - s = S\cos\frac{\pi t}{2T}, \quad t = \frac{2T}{\pi}\arc\cos\left(\frac{S-s}{S}\right).$$

Pour appliquer les formules générales (4 et 5), nous aurons à substituer:

$$f(s) = \frac{2T}{\pi}\operatorname{arc\,cos}\left(1 - \frac{s}{S}\right),$$

$$\varphi(\omega) = S\left(1 - \cos\frac{\pi\omega}{2\alpha}\right),$$

$$f[\varphi(\omega)] = \frac{2T}{\pi}\operatorname{arc\,cos}\left\{1 - \frac{1}{S}\cdot S\left[1 - \cos\left(\frac{\pi\omega}{2\alpha}\right)\right]\right\} = \frac{T}{\alpha}\omega,$$

$$\varphi'(\omega) = \frac{\pi S}{2\alpha}\sin\frac{\pi\omega}{2\alpha}.$$

16. Il vient d'après cela:

$$\xi = \frac{\alpha}{T\omega}\int_0^\omega \frac{T\omega}{\alpha}\cdot\frac{\pi S}{2\alpha}\sin\left(\frac{\pi\omega}{2\alpha}\right).\cos\omega\,d\omega$$

$$= \frac{\pi S}{2\alpha\omega}\int_0^\omega \omega\sin\frac{\pi\omega}{2\alpha}\cos\omega\,d\omega,$$

ou, en décomposant ce produit trigonométrique (1):

$$\xi = \frac{\pi S}{\alpha\omega}\int_0^\omega \omega\left\{\sin\left[\frac{(\pi + 2\alpha)\omega}{2\alpha}\right] + \sin\left[\frac{(\pi - 2\alpha)\omega}{2\alpha}\right]\right\}d\omega.$$

(1) Cette décomposition reste évidemment toujours permise, mais l'intégration consécutive ne l'est qu'à la condition expresse d'exclure de cette analyse le cas particulier:

$$\pi - 2\alpha = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{2},$$

car il y a lieu, pour l'effectuer, de diviser par le facteur $\pi - 2\alpha$.

Cette circonstance n'introduit du reste aucune lacune, car ce cas, qui

En effectuant les calculs de l'intégration, dont je supprime le détail, on obtient:

$$\frac{(\pi-2\alpha)^2}{8\pi\alpha S}\xi = \sin\omega\sin\frac{\pi\omega}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\alpha}\cos\omega\cos\frac{\pi\omega}{2\alpha}$$

$$+\frac{1}{(\pi+2\alpha)^2\omega}\left\{(\pi^2+4\alpha^2)\cos\omega\sin\frac{\pi\omega}{2\alpha} - 4\pi\alpha\sin\omega\cos\frac{\pi\omega}{2\alpha}\right\}.$$

On trouve de même:

$$\frac{(\pi-2\alpha)^2}{8\pi\alpha S}\eta = \cos\omega\sin\frac{\pi\omega}{2\alpha} - \frac{\pi}{2\alpha}\sin\omega\cos\frac{\pi\omega}{2\alpha}$$

$$+\frac{1}{(\pi+2\alpha)^2\omega}\left\{(\pi^2+4\alpha^2)\sin\omega\sin\frac{\pi\omega}{2\alpha} + 4\pi\alpha\cos\omega\cos\frac{\pi\omega}{2\alpha} - 4\pi\alpha\right\}.$$

On a en particulier pour le sommet M_1, c'est-à-dire la demi oscillation: $\omega = \alpha$,

$$\frac{(\pi-2\alpha)^2}{8\pi\alpha S}\xi_1 = \sin\alpha + \frac{\pi^2+4\alpha^2}{\alpha(\pi+2\alpha)^2}\cos\alpha,$$

$$\frac{(\pi-2\alpha)^2}{8\pi\alpha S}\eta_1 = \cos\alpha + \frac{\pi^2+4\alpha^2}{\alpha(\pi+2\alpha)^2}\sin\alpha - \frac{4\pi}{(\pi+2\alpha)^2}.$$

et pour le rebroussement M_2, c'est-à-dire l'oscillation complète: $\omega = 2\alpha$,

$$\frac{(\pi-2\alpha)^2}{8\pi\alpha S}\xi_2 = \cos 2\alpha + \frac{4\alpha}{(\pi+2\alpha)^2}\sin 2\alpha,$$

$$\frac{(\pi-2\alpha)^2}{8\pi\alpha S}\eta_2 = \sin 2\alpha - \frac{4\alpha}{(\pi+2\alpha)^2}\cos 2\alpha - \frac{4\alpha}{(\pi+2\alpha)^2}.$$

---

est celui de la cycloide, s'intégrerait plus simplement encore, et d'ailleurs nous l'avons déjà envisagé par une autre voie (§ 11). Il était toute fois essentiel de placer ici cette remarque, pour éviter que l'on ait l'idée de chercher, dans cette hypothèse très simple, une vérification de l'analyse actuelle.

V

17. La notion du centre de gravité du temps de parcours peut se généraliser.

Au lieu de répartir le long de la trajectoire une densité $\frac{1}{v}$, en changeant par là son arc infinitésimal ds en une masse élémentaire $\frac{1}{v}\,ds = dt$, on y peut concentrer, à titre de densité, *tel élément de dynamique générale que l'on voudra choisir*, et édifier, *pour chaque choix fait successivement*, toute une théorie semblable à celle que nous venons de parcourir.

18. Adoptons par exemple comme loi générale de la densité à répartir le long de la trajectoire sur laquelle des liaisons assujettissent sans frottement un point matériel, la valeur de la pression mutuelle N qu'exercent l'un sur l'autre, suivant la normale, le mobile et la courbe.

Je considérerai comme application le mouvement d'un point

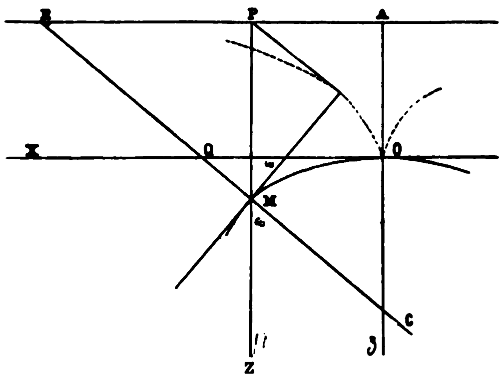


Fig. 3

pesant sur la chainette renversée (fig. 3) qui a pour équation *intrinsèque:*

$$s = \operatorname{tang}\omega\,, \quad \rho = \frac{ds}{d\omega} = \frac{1}{\cos^2\omega}\,.$$

Nous supposerons que le mobile part du sommet O avec une vitesse initiale égale à celle qui serait due à la hauteur $AO = 1$, à savoir $v_0 = \sqrt{2g}$.

On aura dès lors en un point quelconque M:

$$v^2 = v_0^2 + 2g.MQ = 2g(1 + MQ) = 2g.MP,$$

$$\rho = MC = MR = \frac{MP}{\cos\omega},$$

$$\frac{v^2}{\rho} = 2g\cos\omega.$$

La force centripète $\frac{v^2}{\rho}$ résulte de la composante normale $g\cos\omega$ de la pesanteur et de la réaction N. Cette dernière restera donc, comme chacune des deux autres, proportionnelle à la fonction $\cos\omega$, qui peut dès lors être prise comme expression de la densité.

La masse élémentaire sera d'après cela:

$$dm = ds\cos\omega = dx, \quad m = x.$$

On a par conséquent:

$$d\,M_z = xdm = xdx, \quad M_z = \frac{x^2}{2},$$

$$X = \frac{M_z}{m} = \frac{x}{2},$$

et en second lieu:

$$d\,M_x = zdm = zdx,$$

$$Z = \frac{M_z}{m} = \frac{1}{x}\int zdx.$$

Le centre de gravité de la pression normale a dès lors pour abscisse la moitié de celle du mobile, et comme ordonnée l'ordonnée moyenne de la trajectoire.

Nous pouvons d'ailleurs obtenir l'expression explicite de ces deux coordonnées en fonction de la variable indépendante ω.

Il vient d'abord:

$$X = \frac{1}{2}\int_0^{\omega} ds \cos \omega = \frac{1}{2}\int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\cos \omega} = \frac{1}{2} \text{Log tang}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

En second lieu, en intégrant par parties:

$$Z = \frac{1}{x}\int_0^{\omega} z dx = z - \frac{1}{x}\int_0^{\omega} x dz = \int_0 ds \, . \sin \omega - \frac{1}{x}\int_0^{\omega} x ds \sin \omega$$

$$= \int_0^{\omega} \frac{\sin \omega \, d\omega}{\cos^2 \omega} - \frac{1}{x}\int_0^{\omega} x \frac{\sin \omega \, d\omega}{\cos^2 \omega}$$

$$= \frac{1}{\cos \omega} - 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{x}{\cos \omega} - \int_0^{\omega} \frac{dx}{\cos \omega}\right) = -1 + \frac{1}{x}\int_0^{\omega} ds$$

$$= \frac{\text{tang}\, \omega}{\text{Log tang}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} - 1.$$

19. On peut enfin formuler l'équation du lieu géométrique du centre de gravité de la pression normale.

Ecrivons en effet:

$$e^{2X} = \text{tang}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \text{tang}\frac{\omega}{2}}{1 - \text{tang}\frac{\omega}{2}},$$

$$\text{tang}\frac{\omega}{2} = \frac{e^{2X} - 1}{e^{2X} + 1},$$

$$2X(Z + 1) = \text{tang}\, \omega = \frac{2\,\text{tang}\frac{\omega}{2}}{1 - \text{tang}^2\frac{\omega}{2}} = \frac{2(e^{4X} - 1)}{(e^{2X} + 1)^2 - (e^{2X} - 1)^2},$$

et enfin, en remontant l'axe des abscisses de OX en AR:

$$Z' = \frac{e^{2X} - e^{-2X}}{4X}.$$

VI

20. Adoptons maintenant comme densité la force centripète elle-même $\frac{v^2}{\rho}$ (sans l'associer comme tout à l'heure avec les forces extérieures agissantes). La masse élémentaire deviendra $\frac{v^2}{\rho}.ds$ c'est-à-dire $v^2 d\omega$.

Si l'on s'attache spécialement au cas de la gravité, avec des ordonnées plongeantes z rapportées au niveau de vitesse nulle, on aura:

$$v^2 = 2gz,$$

et la masse élémentaire deviendra:

$$dm = 2gzd\omega.$$

21. Considérons comme application le pendule simple, en supposant que le mobile parte sans vitesse du point situé sur l'horizontale du centre:

$$dm = 2g \sin \omega \, d\omega, \quad m = 2g(1 - \cos \omega) = 4g \sin^2 \frac{\omega}{2},$$

$$d\,M_z = xdm = 2g \sin \omega \cos \omega \, d\omega, \quad M_z = g \sin^2 \omega,$$

$$d\,M_x = zdm = 2g \sin^2 \omega \, d\omega, \quad M_x = \frac{g}{2}(2\omega - \sin 2\omega),$$

et par conséquent:

$$X = \frac{M_z}{m} = \cos^2 \frac{\omega}{2}, \quad Z = \frac{M_x}{m} = \frac{2 \quad \sin 2\omega}{8 \sin^2 \frac{\omega}{2}}.$$

On a par exemple [1], en étendant le mouvement jusqu'au point le plus bas:

$$X_1 = \frac{1}{2}, \quad Y_1 = \frac{\pi}{4}.$$

22. Imaginons, comme seconde application, qu'une développante de cercle *d'ordre quelconque n* soit parcourue par un mobile, de telle sorte que l'espace décrit soit proportionnel à une puissance k du temps.

Une telle courbe a pour équation intrinsèque:

$$s = \omega^{n+1}.$$

L'arc s devant être une puissance du temps, il en sera de même de $\frac{ds}{dt}$ ou v. Mais inversement le temps est une puissance de s; la vitesse sera donc elle même puissance de s, et également v^2. D'autre part ρ ou $\frac{ds}{d\omega}$ est, comme s, une puissance de ω, et par suite, inversement, de s. Concluons que la densité $\frac{v^2}{\rho}$ présente elle même ce caractère.

Nous nous trouvons par suite en présence de cet énoncé: trouver le centre de gravité (ordinaire) d'un arc de développante de cercle d'ordre quelconque, dont la densité varie comme une certaine puissance p de sa longueur.

Or j'ai déjà eu occasion d'envisager ce problème dans une autre circonstance, à laquelle je ne puis que me référer en ce moment (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome CXLII, pag. 1134). C'était à la vérité sous la réserve expresse que cette

---

[1] On peut obtenir l'équation du lieu géométrique de ce centre, mais elle est compliquée.

On peut également déterminer le centre de gravité de la force centripète pour la tractrice, en se servant de son équation intrinsèque:

$$\rho = \tang \omega,$$

et supposant qu'un mobile la suit sous l'action de la pesanteur à partir de son point de rebroussement.

puissance p fût entière et positive. Mais, si l'on effectue le calcul dont je viens de tracer le canevas, on trouve:

$$k = \frac{2}{\dfrac{n+2}{n+1} - p}.$$

Il suffira donc d'attribuer à n et p diverses valeurs entières et positives, pour obtenir une double infinité de valeurs de k entières ou fractionnaires remplissant la condition voulue.

S'il s'agit par exemple de la développante de cercle proprement dite ($n=1$), et d'une densité proportionnelle à l'arc lui-même ($p=1$), il vient: $k=4$. Il suffit du reste, pour aboutir à cette loi de densité $p=1$ avec un ordre quelconque n de développantes, de prendre $k=2(n+1)$.

Si l'on suppose que *le cercle lui même* ($n=o$) soit parcouru d'un mouvement uniformément varié ($k=2$), il vient: $p=1$, c'est-à-dire une densité des arcs de cercle proportionnelle à leur longueur. J'ai donné pour le lieu du centre de gravité dans ce cas (*loco citato*, pag. 1075) l'équation:

$$\frac{2(1-x)y}{x^2+y^2} = \sin\left(2\sqrt{\frac{1-x}{x^2+y^2}}\right) - 2\sqrt{\frac{1-x}{x^2+y^2}}\cos\left(2\sqrt{\frac{1-x}{x^2+y^2}}\right).$$

VII

22. Supposons enfin que l'on adopte comme densité la force tangentielle $\frac{dv}{dt}$. La masse infinitésimale sera dès lors $\frac{dv}{dt}.ds$, c'est-à-dire vdv, ou l'accroissement de demi force vive. Il s'agit donc alors du *centre de gravité de l'énergie acquise dans le parcours*.

Attachons-nous spécialement au cas de la gravité agissant le long d'une trajectoire:

$$x = f(z),$$

tracée dans un plan vertical et rapportée au niveau de vitesse nulle. Le théorème du travail donne alors pour l'expression de la demi force vive:

$$m = \frac{v^2}{2} = gz\,, \quad dm = vdv = gdz\,.$$

Il vient donc d'une part:

$$d\mathrm{M}_x = zdm = gzdz\,, \quad \mathrm{M}_x = \frac{gz^2}{2}\,,$$

$$\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{M}_x}{m} = \frac{z}{2}\,.$$

Ainsi, quelle que soit la trajectoire, le centre cherché se trouve au milieu de la hauteur parcourue.

Nous avons d'autre part pour l'abscisse:

$$d\mathrm{M}_z = xdm = f(z)\,.\,gdz\,, \quad \mathrm{M}_z = g\int_0^z f(z)\,dz\,,$$

$$\mathrm{X} = \frac{\mathrm{M}_z}{m} = \frac{1}{z}\int_0^z f(z)\,dz\,,$$

c'est-à-dire l'abscisse moyenne de l'arc parcouru.

Nous pouvons, pour une trajectoire quelconque, écrire directement l'équation du lieu géométrique du centre de gravité de l'énergie. Si en effet, dans cette dernière relation, nous remplaçons z par 2Z, il vient:

$$\mathrm{X} = \frac{1}{2\mathrm{Z}}\int_0^{2\mathrm{Z}} f(\alpha)\,d\alpha\,.$$

24. Envisageons comme application le pendule circulaire, en supposant pour simplifier qu'il parte sans vitesse du niveau du

point de suspension:

$$x = \sqrt{1 - z^2},$$

$$\int_0^z f(z)\, dz = \frac{z\sqrt{1 - z^2} + \arcsin z}{2},$$

$$2X = \sqrt{1 - z^2} + \frac{\arcsin z}{z}.$$

Pour la demi-oscillation complète étendue jusqu'au point le plus bas, on obtient, en faisant $z = 1$:

$$X_1 = \frac{\pi}{4}, \quad Z_1 = \frac{1}{2},$$

L'équation du lieu géométrique du centre de gravité:

$$2X = \sqrt{1 - 4Z^2} + \frac{\arcsin 2Z}{2Z},$$

reste donc réelle, puisque Z ne dépasse pas $\frac{1}{2}$.

25. Soit, comme seconde application, une courbe quelconque:

$$r = f(\theta), \quad dr = f'(\theta)\, d\theta,$$

parcourue librement suivant la loi des aires sous l'empire de la force centrale $F(r)$:

$$dm = v dv = F(r)\, dr,$$

$$m = \int_0^\theta F[f(\theta)]\, f'(\theta)\, d\theta,$$

$$d M_y = x dm = r \cos\theta \,.\, F(r)\, dr,$$

$$M_y = \int_0^\theta f(\theta) \,.\, F[f(\theta)] \,.\, f'(\theta) \,.\, \cos\theta \,.\, d\theta,$$

d'où la valeur de X, en divisant ces intégrales l'une par l'autre et une formule correspondante en Y dans laquelle $\sin\theta$ remplace $\cos\theta$.

26. Considérons par exemple la spirale sinusoide d'ordre quelconque n, entier ou fractionnaire, positif ou négatif:

$$r^n = \sin n\theta\,, \quad r = \sin^{\frac{1}{n}} n\theta\,,$$

$$dr = \sin^{\frac{1-n}{n}} n\theta \cos n\theta\, d\theta\,.$$

On sait par la théorie de ces courbes que la force centrale s'exerce alors en raison inverse de la puissance $2n+3$ de la distance:

$$\mathrm{F}(r) = r^{-2n-3}\,.$$

Il vient dès lors (*en réservant expressément* pour chaque cas d'apprécier l'effet des limites des intégrations, lequel peut compliquer ces expressions de nouveaux termes):

$$m = \sin^{-2\frac{n+1}{n}} n\theta\,,$$

$$\mathrm{M}_y = \int \sin^{-\frac{3n+2}{n}} n\theta \cos n\theta \cos d\theta\,,$$

$$\mathrm{X} = \sin^{2\frac{n+1}{n}} n\theta \int \sin^{-\frac{3n+2}{n}} n\theta \cos n\theta \cos\theta\, d\theta\,,$$

et la formule semblable en Y.

Ajoutons, sans nous y arrêter, que les intégrations s'achèvent complètement dans les divers cas suivants: $n = -2$ (hyperbole équilatère rapportée à son centre, force proportionnelle à la distance); $n = -\frac{1}{2}$ (parabole au foyer, gravitation); $n = +\frac{1}{2}$ $\left(\text{limaçon, force } \frac{1}{r^4}\right)$; $n = 1$ $\left(\text{cercle passant au pôle, force } \frac{1}{r^5}\right)$; $n = 2$ $\left(\text{lemniscate, force } \frac{1}{r^7}\right)$.

VIII

27. Je terminerai cette étude par la question suivante. Imaginons un observateur entraîné dans la translation d'un système d'axes qui a pour origine le mobile lui-même. Le centre de gravité des arcs parcourus (qu'il s'agisse de temps, de pression, d'énergie, ou de tout autre élément dynamique adopté comme densité de la trajectoire absolue) lui paraitra animé d'un mouvement relatif, dont on peut se proposer de connaître la trajectoire apparente.

Rien de plus facile en termes généraux. Les complications seront pour l'application. Si la trajectoire absolue a pour équation:

$$y = f(x),$$

et si la théorie qui correspond au choix de la densité a donné pour le centre de gravité:

$$X = \varphi(x, y), \quad Y = \psi(x, y),$$

on aura pour les coordonnées de son mouvement relatif:

$$\xi = x - X = x - \varphi[x, f(x)],$$
$$\eta = y - Y = f(x) - \psi[x, f(x)],$$

et il suffira d'éliminer x entre ces deux formules, ou même, si c'est impossible, de les discuter en cet état, comme on le fait pour les unicursales.

Remarquons d'ailleurs que c'est précisément sous cette forme que s'est présenté de lui-même le résultat dans l'une de nos recherches générales, celle du § IV.

Pour les autres, on peut [1] reprendre à ce nouveau point de

---

(1) Par exemple, en ce qui concerne le temps de parcours et la parabole (n.° 2), on trouve une autre parabole dont le paramètre est les $\frac{3}{8}$ du proposé.

Pour la pression normale et la chainette renversée (n.° 18), on obtient l'équation:

$$4\eta\xi = (2\xi - 1)e^{2\xi} + (2\xi + 1)e^{-2\xi}.$$

vue les divers exemples, mais je n'en veux développer les calculs que pour un seul, à savoir: le centre de gravité du temps de parcours de la spirale logarithmique suivant la loi des aires.

A l'instant même où se pose cette question, le lecteur ne manquera pas de répondre: la trajectoire relative doit être une spirale égale tournée d'un certain angle autour du pôle. Cette intuition, fondée sur une expérience si souvent renouvelée sur cette belle courbe, se trouve encore justifiée dans le cas actuel, et nous pouvons aisément l'établir.

28. Les formules du n.° 6 donnent à cet égard:

$$\xi = x - X = r\left[\cos\theta - \sin b \cot a \cos(\theta - b)\right],$$

$$\eta = y - Y = r\left[\sin\theta - \sin b \cot a \sin(\theta - b)\right].$$

Passons aux coordonnées polaires r', θ':

$$r'^2 = \xi^2 + \eta^2 = r^2(1 + \sin^2 b \cot^2 a - \sin 2b \cot a),$$

θ disparaissant de lui-même dans les réductions que subit cette parenthèse. D'autre part:

$$\operatorname{tang}\theta' = \frac{\eta}{\xi} = \frac{\sin\theta - \sin b \cot a \sin(\theta - b)}{\cos\theta - \sin b \cot a \cos(\theta - b)}$$

$$= \frac{\operatorname{tang}\theta + \dfrac{\sin^2 b \cot a}{1 - \sin b \cos b \cot a}}{1 - \dfrac{\sin^2 b \cot a}{1 - \sin b \cos b \cot a}\operatorname{tang}\theta}.$$

Posons:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin^2 b \cot a}{1 - \sin b \cos b \cot a},$$

il vient:

$$\operatorname{tang} \theta' = \operatorname{tang}(\theta + \alpha), \quad \theta = \theta' - \alpha,$$

$$r' = \frac{\sqrt{1 + \sin^2 b \cot^2 a - \sin 2b \cot a}}{e^{\alpha \cot a}} e^{\theta' \cot a},$$

c'est-à-dire une courbe semblable à la proposée, et par conséquent une spirale égale tournée d'un certain angle.

En égalant à $2k\pi$ l'expression de cet angle, et résolvant numériquement par rapport à a cette équation transcendante, on déterminerait des spirales spéciales pour lesquelles l'observateur verrait le centre de gravité le suivre sur sa propre trajectoire.

Le rayon r' restant proportionnel à r, le mouvement relatif du centre de gravité s'opère suivant la loi des aires, comme celui du mobile lui-même.

A OBRA SCIENTIFICA E A VIDA DO CHIMICO PORTUGUEZ ROBERTO DUARTE SILVA

POR

A. J. Ferreira da Silva

(Conclusão)

SEGUNDA PARTE

I

Temos até aqui considerado o homem de sciencia, o investigador, o sabio; passamos a considera-lo na sua vida particular, nas phases da sua existencia cortada tantas vezes de infortunio, no seu caracter lealissimo e nobre, nos exemplos que nos legou.

Nasceu Roberto Duarte Silva na Ilha de Santo Antão, da provincia de Cabo Verde, aos 25 de fevereiro de 1837. Foram seus pais Francisco José Duarte e D. Mathilde Rosa Silva, naturaes da mesma ilha. Eram mais sete irmãos, dos quaes só hoje vive o sr. Antonio Duarte Silva, a quem devo a maior parte das notas biographicas que vão seguir, e que elle tão gentilmente pôz á minha disposição, como preito á memoria do irmão que tanto queria.

Ainda muito novo, com cerca de dez annos de idade, foi confiado por seu pai á direcção do pharmaceutico Antonio Gonçalves de Almeida Rhino, natural de Santarem, e que se fora estabe-

lecer em Santo Antão; parece que fora a primeira pharmacia da ilha.

Era o referido pharmaceutico coxo e gottôso, e a doença prendia-o a miudo no leito, d'onde dirigia o seu discipulo, e, quando preciso, o corrigia; ROBERTO SILVA, sem murmurar, soffria pacientemente os castigos das suas faltas, e applicava-se, cada vez com maior zelo e cuidado, ao cumprimento dos seus deveres e ao estudo das suas lições.

Estava ainda praticando n'esta pharmacia quando, aos 14 annos, em 15 de janeiro de 1851, teve o grande desgosto de perder seu pai.

O mestre, em apparencia rigoroso e rispido, tinha um espirito esclarecido e sentimentos delicados; e assim affeiçoou-se ao seu discipulo, a tal ponto que, depois d'aquella dolorosa perda, o mandou para Lisboa em 3 de julho de 1854, a praticar em pharmacia e seguir os cursos que lhe eram precisos, para obter o diploma de praticante pharmaceutico pela Escola de Lisboa.

Primeiro esteve na pharmacia da viuva Rhino, parenta do seu mestre, e estabelecida na calçada do Marquez d'Abrantes; depois passou para a do sr. Antonio Feliciano Alves d'Azevedo, Filhos, na praça de D. Pedro, onde continuou a praticar, seguindo os cursos theoricos sob a direcção do illustre pharmaceutico João José de Sousa Telles, que depois foi tambem mestre, em algumas disciplinas no lyceu de Lisboa, de seu irmão Antonio.

Antes de terminar os seus estudos pharmaceuticos e fazer o respectivo exame de habilitação teve o desgosto de perder o seu amigo Gonçalves Rhino, que falleceu em Santo Antão, quasi dois annos antes de elle ter terminado os seus estudos de pharmacia. Não se esqueceu em seu testamento o mestre do discipulo querido, legando lhe uma boa importancia em dinheiro, que o habilitava a concluir os seus estudos.

Pouco depois da perda do sr. Rhino, soffreu outro golpe dolorosissimo: sua queridissima mãe fallecera em Santo Antão no dia 18 de setembro de 1856, victima da epidemia de cholera, que alli se propagára.

Foi em 21 de março de 1857 que elle fez exame de habilitação em pharmacia, sendo presidente da mesa examinadora o dr. Bernardino Antonio Gomes; e tal foi a impressão que o seu saber causou no jury que lhe foi concedida a maxima classifica-

ção — approvação plena com louvor, abraçando-o depois da prova os membros do jury.

A morte de sua mãe influiu muito no destino de Roberto Duarte Silva. Em vez de regressar á sua terra natal e exercer ali a sua profissão, como era a principio o seu intuito, partiu em abril de 1857 para Macau, onde foi administrar uma pharmacia cujo proprietario era de lá natural ou alli residia. Ahi esteve tres annos, indo depois estabelecer-se em Hong-Kong.

Uma prova da gentileza do seu caracter é que logo que partiu para Macau deu ordem para que viesse para Lisboa seguir os estudos pharmaceuticos, por sua conta, seu irmão Antonio; este de facto esteve em Lisboa até 1866, onde seguiu o curso de pharmaceutico de primeira classe, indo depois montar uma pharmacia na cidade de Mindello, da Ilha de S. Vicente, onde reside.

Correram bem a Roberto Silva os negocios em Hong-Kong. Era na epoca da expedição franceza á China. Alcançou, narra o sr. Friedel, o titulo de fornecedor da esquadra franceza. Muito longe de abusar d'esta qualidade, houve-se, n'uma occasião em que o corpo expedicionario francez tinha falta de sulfato de quinino, para tratamento dos seus doentes, com tal delicadeza, que lhe valeu a estima e amizade dos medicos e pharmaceuticos militares que com elle tinham tido relações. Contribuiu, sem duvida, esta amizade para o attrahir a França; e encontrou, de facto, verdadeiras affeições quando n'esta nação veiu fixar a sua residencia. Silva, continua Friedel, discreto até o extremo em tudo que lhe dizia respeito, como no que concernia aos outros, nada disse nunca d'este incidente tão honroso, e só pouco antes da sua morte se teve conhecimento d'elle por meio de um dos seus amigos da China.

Mas se a fortuna lhe sorria pelo lado da prosperidade dos seus negocios, a sua saude resentia-se do clima: vieram as febres, depois uma bronchite, que desde principio lhe deu muito cuidado.

Esta circumstancia, o vivo amor que sempre nutriu pela sciencia chimica, o reconhecer que a sua educação n'esta especie fora muito incompleta, a admiração que nunca deixou de consagrar aos grandes mestres que se illustraram pelas suas descobertas e o desejo de os ouvir de viva voz e aprender com elles — tudo isto o determinou a abandonar a China em 1862, na qual não esteve mais do que cinco annos, e a regressar á Europa, seguindo para Paris, afim de continuar os seus estudos.

Ahi começou a frequentar, no anno lectivo de 1862-1863, os cursos dos grandes mestres, cujas obras elle lêra e cujos trabalhos conhecia: — BALARD, BERTHELOT, SAINTE-CLAIRE DEVILLE, WURTZ e outros.

O inverno de Paris foi prejudicial á saude, e por conselho dos medicos, teve de renunciar a seguir estas lições; voltou a Portugal, estando algum tempo em Bellas e Lisboa; só em março de 1863 voltou definitivamente a Paris.

Convencido de que, para aproveitar devidamente as lições d'aquelles professores, era indispensavel preparar-se seriamente, começou, com decidida coragem, a estudar, além do latim e do francez, as mathematicas e a physica, afim de poder obter o diploma de bacharel em sciencias, o que conseguiu, com o seu decidido esforço e talento, em breve tempo, pois que o alcançou em 10 de novembro de 1864.

Com a mesma coragem se decidiu a obter o grau de licenceado em sciencias physicas; frequentou, com esse fim, o laboratorio de WURTZ, afim de realisar trabalhos de chimica organica, e o de PISANI, para estudar especialmente a analyse chimica mineral. Os primeiros vestigios d'este tirocinio são a analyse das areas de Cabo-Verde, a que nos referimos como premicia do seu labor, e a sua nota sobre as amylaminas. Em 18 de novembro de 1868 pôde realisar os seus exames e obter o grau de licenciado em sciencias.

No laboratorio de WURTZ continuou a trabalhar, feliz por se occupar de questões elevadas de sciencia junto de um grande mestre, quando uma noticia triste lhe fora transmittida; o seu peculio, fructo do seu trabalho em Hong-Kong, e que elle deixára lá, sumira-se nas mãos infieis, a cuja guarda o confiara. Viu-se, de repente, reduzido ao pouco que comsigo trouxera.

Foi-lhe penoso encurtar suas despezas e cingir-se a uma rigorosa economia para poder proseguir nos seus estudos favoritos; nunca o abandonára a fé n'um futuro melhor.

Quando rebentou a guerra da Allemanha com a França encontrava-se elle em Inglaterra, a aperfeiçoar-se no inglez, aproveitando a occasião de tambem visitar o laboratorios de chimica e conhecer os methodos de trabalho dos mestres das diversas nações. Voltou immediatamente a Paris; mas, por conselho dos seus amigos, decidiu-se a sahir, com magoa, e foi de novo para Londres, onde, no laboratorio do prof. WILLIAMSON, realisou com o

seu amigo Crafts, que tambem estudára em França, os trabalhos sobre a triethylphosphina, de que já dêmos conta.

Regressando a Paris depois do cerco e dos calamitosos acontecimentos da Communa, solicitou e obteve do seu já então devotado amigo e mestre Friedel o ser admittido no laboratorio da Escola de Minas, onde trabalhou tranquillamente e com felicidade até 1873.

N'esta data os seus recursos estavam quasi esgotados: só então se decidiu a dize-lo ao seu presado amigo, mestre e collaborador.

Como então houvesse a vaga de *chefe dos trabalhos de chimica analytica* na Escola Central pela promoção de F. Le Blanc a professor, Friedel solicitou para o seu amigo, por intermedio de Dumas, o logar vago; e a nomeação foi feita em breve, porque Dumas conhecia o valor do nosso compatriota como chimico, e a elevação do seu caracter.

A esta acção liberal e nobre, determinada por um espirito puro de justiça, e sem preoccupações mesquinhas de fronteiras e nacionalidades, se referiu n'um *toast* levantado na festa de engenheiros celebrada em 26 de outubro de 1878, na occasião da Exposição universal, pelos antigos alumnos da Escola Central, o nosso illustre patricio e chimico Antonio Augusto d'Aguiar (1).

Antes de encetar as suas funcções novas na Escola Central, acontecia-lhe um desastre no laboratorio de Wurtz onde fôra transitoriamente terminar um trabalho; ferira-se gravemente no olho esquerdo com um tubo de vidro quebrado; e as consquencias d'esse accidente foram taes, que houve necessidade de lhe fazer a ablação d'este olho. Foi operado na clinica do dr. Wecker, com muito soffrimento para elle, por não poder supportar a chloroformisação.

Depois occupou-se com affan da organização do ensino pratico da analyse chimica na Escola Central; e fe-lo com um completo exito. «Á força de vontade e de perseverança, diz o sr. Friedel, e applicando os menores pormenores da sua consciencia minuciosa, conseguiu transformar do modo mais feliz os trabalhos praticos de chimica na Escola Central; e deu-lhe uma importancia e utilidade que nunca até ahi tinham tido».

(1) Comberousse (Ch. de), *Histoire de l'École Centrale des arts et manufactures.* Paris, 1879, pag. 266.

Tendo sido encarregado tambem de dirigir, para os alumnos do 3.º anno, manipulações de chimica analytica industrial, organizou estes trabalhos com o mesmo espirito pratico, e tendo sempre em vista o que era realmente util aos seus alumnos.

Não fazia só as conferencias para illucidação dos trabalhos a realisar; organizava tudo, revia os trabalhos dos alumnos, fazia de preparador e de servente, gastando n'isto muito tempo, e passando grande parte do dia na Escola.

O exito do seu ensino fôra tal que quando em 1881 se creou em Paris a Escola Municipal de physica e chimica, a commissão de organisação indicou o nome d'elle para a regencia do curso de chimica analytica na nova escola, para a qual entraram tambem Schutzenberger, director, e Henninger. Aqui temos um novo testemunho de consideração e do mais alto apreço que a sciencia franceza dava a um estrangeiro, que queria como aos seus nacionaes, e que até lhes preferia, pelas provas já dadas de zelo scientifico.

As novas funcções forçaram-no a conservar na Escola Central só o ensino pratico no 2.º anno. Mas a actividade contínua que os dois cargos lhe exigiam, e ainda, sobre tudo isto, os trabalhos de pesquizas chimicas solicitados por amigos ou discipulos seus, a quem, embora com sacrificio, não recusava um esclarecimento que dependesse do seu saber especial, ia manifestando uma influencia funesta sobre a sua saude.

Em 15 de março de 1884 escrevia-nos: «Como deverá suppôr, é-me bastante doloroso não poder entregar-me aos meus trabalhos de laboratorio e ver-me na necessidade de preparar, sem cessar, longas e contínuas lições de chimica geral, de metaes e d'analyses, de modo que nem o meu tempo nem as minhas forças quasi que bastam para o que tenho a fazer».

Já os seus amigos lhe aconselhavam a que se poupasse e moderasse os seus esforços. Conselhos baldados, porque Roberto Silva não se eximia a desempenhar os seus deveres senão com o maior zelo, solicitude e consciencia.

Tendo em 1886 vagado na Escola Central a cadeira de chimica analytica, pelo fallecimento de Le Blanc, o conselho da Escola não hesitou em designar Roberto Silva para a occupar, não obstante a alluvião de pretendentes, alguns já distinctos, que se apresentaram. D'esta subida honra tornara-se elle merecedor, diz Friedel, pelo modo como havia desempenhado as funcções

de chefe dos trabalhos de chimica analytica; pela competencia especial que lhe era reconhecida, por um trabalho sempre progessivo; e não só por isso, como ainda pela affecção e respeito dos alumnos, que elle conseguira captar pela sua dedicação.

Conforme os usos, occupou o novo e elevado logar nos annos lectivos de 1886-1887 e 1887-1888 a titulo provisorio, e com tal distincção, que foi em seguida nomeado professor titular, e portanto membro do conselho da Escola.

Tinha o nosso patricio attingido posição elevada no meio scientifico da capital franceza; estava a coberto das contingencias de trabalho modicamente retribuido; podia agora moderar os seus esforços, dedicando-se meramente ao ensino, ficando outros com a fiscalisação dos trabalhos praticos. As suas aspirações tinham sido realisadus; ultrapassára talvez a meta das suas ambições; a sciencia concedera-lhe uma larga recompensa ao amor com que a cultivára; podia considerar-se feliz, e dedicar-se agora de novo a trabalhos originaes de investigação, interrompidos por força das circunstancias.

Mas... a sua saude achava-se já profundamente abalada com o excesso de tal fadiga. Chegára ao cume da montanha suspirada, e achava-se prestes a desfallecer com o esforço da ascenção. A gloria, acompanhada da independencia materiral, abraçava-o; mas parece que era um abraço precursor da morte.

Em verdade, o inverno de 1887-1888 já o abalára bastante; entretanto, com o esforço costumado, conseguira, depois de algum descanço em Biarritz, terminar as suas lições e assistir aos exames finaes dos seus alumnos. Terminados estes foi aconselhado a ir para Cauterets, nos Altos Pyreneus, donde, em 1 de setembro, me escrevia dizendo: «tenho estado doente bastante tempo n'estes ultimos tempos, circunstancia que me tem obrigado a consagrar as minhas poucas forças só ao desempenho dos meus deveres escolares, e a deixar de lado os meus proprios negocios e até a faltar ás minhas obrigações sociaes».

No dizer do sr. Friedel, a estada em Cauterets foi-lhe mais inconveniente do que util, e veiu de lá em tal estado que os seus amigos suppunham impossivel o recomeçar o seu curso de 1888-1889 e aconselharam-lhe a permanencia e descanço no sul.

Não quiz elle ouvir estes prudentes conselhos, e foi tomar posse da cadeira, de que era agora o proprietario. Que o trabalho lhe estava sendo carga pesadissima mostram-n'o os seguintes

trechos da carta que em 10 de dezembro nos escreveu: «presentemente só me posso occupar da minha correspondencia aos domingos; e dois domingos se passaram sem ter podido fazer coisa alguma, *por excesso de cansaço;* pois particularmente as lições dos sabbados são mais que laboriosas; o numero dos alumnos é de 230; o amphitheatro é immenso; é necessario levantar a voz consideravelmente, e um grande numero d'alumnos são indisciplinados». «A minha saude, diz n'outro ponto da mesma carta, tem deixado muito a desejar n'estes ultimos tempos... Sou tratado agora d'um modo racional, e tenho fé de me restabelecer; o meu maior mal é uma desnutrição, occasionada pela doença de estomago».

Como elle ignorava a gravidade do seu estado!

As ferias de Natal de 1888-1889, em vez de lhe trazerem, com o descanço relativo, algumas melhoras, parece que lhe produziram enfraquecimento mais geral de forças. Na ultima carta que me escreveu suspira por «voltar á saude e á sua antiga força»; entretanto pouco depois continuava as suas lições, mas n'um estado de abatimento tão visivel que, diz FRIEDEL, os seus discipulos comprehendiam que estavam diante d'um moribundo, preso ao seu dever por paixão! E, quando, com a voz sumida, acontecia perguntar se o ouviam bem, os alumnos, querendo poupal-o a um desgosto, diziam que sim, não obstante só poderem ouvir-lhe as palavras os que estavam nas primeiras bancadas!

Mas este supremo esforço havia de apressar-lhe o desenlace fatal; tendo, por falta de forças, pedido que o substituissem, poucos dias restou com vida, finando-se em 9 de fevereiro ás 8 da manhã (1), antes mesmo de ter entrado em exercicio o substituto que fora designado!

Assim desapparecia deste mundo, diz FRIEDEL, uma alma nobre, um homem escravo de seu dever e amante apaixonado da sciencia. Foi dura e aspera a sua carreira desde principio a fim; teve, é certo, as alegrias dos triumphadores; mas, conquistadas á custa de trabalho e esforço insano, foram alegrias ephemeras, porque a morte lh'as ceifou em breve.

Na lucta sem treguas, em que andou sempre empenhado, va-

---

(1) Segundo a carta que o sr. FRIEDEL escreveu ao sr. Antonio Feliciano Alves de Azevedo, Filhos, de Lisboa.

leram-lhe as amizades leaes e fieis que, pelas suas levantadas qualidades moraes, elle merecia, e entre as quaes se deve extremar a do sr. Friedel. Valeu-lhe tambem uma fé inalteravel em Deus e na sua infinita misericordia, fé de carvoeiro, quasi infantil, que nunca o abandonou desde a mocidade até os ultimos momentos, embora sem tomar a forma de nenhum culto externo.

Sabio distincto e perfeito homem de bem, a sua perda não podia deixar de ser sentida por grande numero de pessoas para quem o seu ensino tinha sido prestimoso e a sua vida um exemplo. As suas exequias foram, em realidade, muito concorridas por amigos, collegas e discipulos; e um monumento foi elevado pelos que mais privaram com elle e mais o apreciaram, no cemiterio Mont-Parnase, onde jazem os seus restos mortaes.

II

Antes de apresentar a lista completa das suas notas e memorias, refiramos as honras e recompensas que pelo seu lavor alcançou, ás quaes, diz o sr. Friedel, elle era muito sensivel, em sua extrema modestia, como o era ao menor testemunho de estima e amizade recebido daquelles que considerava como mestres.

Em 1878, depois da Exposição Universal de Paris, onde tinha desempenhado o papel de membro portuguez do jury, recebeu por decreto de 19 de outubro de 1878 o grau da Cruz de cavalleiro da Legião de Honra. Já antes d'isso o governo portuguez o condecorara com o grau de cavalleiro da Ordem de S. Thiago (carta regia de 12 de outubro de 1876).

Em 1876 foi nomeado socio correspondente da Real Academia das Sciencias de Lisboa, e socio honorario da Sociedade pharmaceutica Lusitana.

Depois de ter sido, por diversas vezes, eleito membro do conselho da Sociedade chimica de Paris, foi nomeado em 1885 vice-presidente e em 1886 presidente da mesma sociedade.

Foi sob a sua presidencia que se realisou o projecto de creação de sessões especialmente destinadas á chimica industrial, creação que tanto contribuiu para o desenvolvimento da sociedade.

Estas datas merecem ser recordadas; porque foi em 1884,

quando não podia esperar ainda as honras que lhe haviam de ser conferidas pela Sociedade, que redigiu o seu testamento, ácerca do qual a ninguem fallou e que foi encontrado depois da sua morte entre os seus papeis. Por elle legava á mesma Sociedade a sua bibliotheca; signal de quanto apreciava os serviços que a Sociedade Chimica prestava, o desejo que tinha de ainda concorrer para elles depois do seu fallecimento e o amor á sua segunda patria.

Roberto Silva seguia com bastante regularidade os congressos da *Association française pour l'avancement des sciences*, onde fez algumas communicações na secção de chimica, e foi por diversas vezes nomeado seu delegado ao conselho da associação. No congresso de 1875 em Nantes, de 1876 em Clermont-Ferrand, e em 1877 no Havre serviu de secretario; foi escolhido para no congresso de Nancy em 1876 presidir á secção de chimica, e d'este cargo se desempenhou, como dos outros, com o cuidado e dedicação costumada em todos os trabalhos de que era encarregado.

Foi delegado do governo portuguez á reunião internacional que ha annos se realisou em Paris para a protecção dos cabos submarinos, e recebeu, pouco depois, do ministerio da marinha de Portugal um chronometro com uma inscripção allusiva aos seus serviços na commissão.

Em 1885 a Academia das sciencias de Paris conferiu-lhe, pelos seus trabalhos de chimica organica, o premio Jecker, que foi repartido por elle e o sr. Prunier, cada um com 4:000 francos, e pelo sr. G. Rousseau, com 2:000 francos.

Em 1887, por carta regia de 13 de janeiro, era-lhe concedida a mercê de commendador da Ordem de S. Thiago.

Diremos, para terminar, que a noticia escripta no *Boletim da Sociedade chimica de Paris* por Friedel a respeito do nosso illustre compatriota foi traduzida em portuguez pelo sr. Antonio Nobre de Mello (1). Devo este pormenor ao meu amigo, sr. José Augusto Macedo de Oliveira.

(1) Tem o titulo: *Noticia sobre a vida e trabalhos de* R. D. Silva por M. Ch. Friedel, membro do Instituto de Paris; traduzido do francez para portuguez por Antonio Nobre Mello; Lisboa, typographia do Commercio de Portugal; 1897, 1 op. in-8.° de 23 pag. Esta obra é dedicada a Roberto Duarte Silva, sobrinho do nosso biographado e com o mesmo nome que elle.

A este mesmo cavalheiro devo o conhecimento do interessante artigo, que sob o titulo de *Episodios de viagem* vai inserido nos documentos.

A *Revista illustrada*, que se publicou em Lisboa, inseriu no n.º 21 (2.º anno, 15 de fevereiro de 1890, pag. 29) um desenho do natural por Carlos Reis do tumulo de ROBERTO D. SILVA no cemiterio Mont-Parnase, em Paris, acompanhada duma noticia biographica, subscripta pelo sr. ARNALDO FONSECA [1].

NOTAS, MEMORIAS E PUBLICAÇÕES DE ROBERTO DUARTE SILVA

1867 — Sur les ammoniaques composées à base d'amyle. *C. R.*, t. LXIV, pag. 1299; *Bull. soc. ch.*, (2), t. VIII, pag. 363.
— Sur un sable titanifère de l'île de Santiago de l'archipel du Cap-Vert. *C. R.*, t. LXV, pag. 207; *Bull. soc. ch.*, (2), t. VIII, pag. 418.

1868 — Huile de *Curcas purgans* et nouvelle source de l'alcool octylique. *C. R.*, t. LXVII, pag. 1261; *Bull. soc. ch.*, (2), t. XI, pagg. 3 e 41
— Sur l'acide pyruvique (com o sr. PH. DE CLERMONT). *Bull. soc. ch.* (2), t. XI, pag. 127.

1869 — Sur quelques éthers isopropyliques: butyrate et valérate d'isopropyle. *C. R.*, t. LXVIII, pag. 1476; *Bull. soc. ch.*, (2), t. XII, pagg. 2, 3 e 113.
— Phénate et cyanate d'isopropyle. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XII, pag. 426.
— Sur quelques composés isopropyliques: succinate, benzoate, azotite et azotate d'isopropyle. *C. R.*, t. LXIX, pag. 416; *Bull. soc. ch.*, (2), t. XII, pagg. 82 e 223 e t. XIII, pag. 27.
— Sur la propylamine. *C. R.*, t. LXIX, pag. 473.

1870 — Chlorobromure de propylène (com o sr. FRIEDEL). *Bull. soc. ch.*, (2) tom. XIII, pag. 484.

1871 — Sur l'identité du propylène chloré derivé du methylchloracetol et celui dérivé du chlorure de propylène (com o sr. FRIEDEL). *Bull. soc. ch.*, (2), t. XV, pag. 4.
— Action du chlorure d'iode sur le chloroforme (avec M. FRIEDEL). *Bull. soc. ch.*, (2), t. XV, pag. 6.
— Action du chlore et du chlorure d'iode sur le chlorure d'isopropyle

[1] A *Revista illustrada* foi editada pela casa Antonio Maria Pereira, de Lisboa.

(com o sr. FRIEDEL). *C. R.*, t. LXXIII, pag. 1379; *Bull. soc. ch.*, (2), t. XVI, pag. 3 [1].

1871 — Sur l'action du chlore sur divers corps de série C^3 et sur les isomères de la trichlorhydrine (com o sr. FRIEDEL). *C. R.*, t. LXXIII, pag. 73.

— Préparation et proprietés de l'oxyde de triéthylphosphine (com o sr. J. M. CRAFTS). *Bull. soc. ch.*, (2), t. XVI, pag. 43.

1872 — Sur quelques nouveaux étheres isopropyliques: formiate et lactate isopropyliques, lactate diisopropylique, cyanate d'isopropyle. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XVII, pag. 97.

— Action du chlorure d'iode sur le chlorure de propylène a 140° en vas clos; existence de *deux propylenes chlorés isomeriques*, obtenus lorsqu'on chauffe le methylchloracetol chloré avec l'eau ou lorsqu'on traite le propyléne chloré par le chlore à l'ombre; sur un éther benzoique chloré (com o sr. FRIEDEL). *Bull. soc. ch.*, (2), t. XVII, pagg. 98 e 193 [2].

— Sur un troisieme propylène bichloré (com o sr. FRIEDEL). *C. R.*, t. LXXV, pag. 81.

— Action de l'argent métallique sur le chloroiodure d'ethylène à 160° (com o sr. CH. FRIEDEL). *Bull. soc. ch*, (2), t. XVII, pag. 242.

— Recherches sur la trichlorhydrine et ses isomères (com o sr. CH. FRIEDEL). *Bull. soc. ch.*, (2), t. XVII, pag. 386.

— Sur le chlorobromure et sur le chloroiodure de propylène (com o sr. CH. FRIEDEL). *Bull. soc. ch.*, (2), t. XVII, pag. 532.

— Action du chlorure d'iode sur le chloroforme et sur les iodures des radicaux alcooliques, et du brome sur le chloroforme (com o sr. FRIEDEL). *Bull. soc. ch.*, (2), t. XVII, pag. 537.

— Sur les isomères de la trichlorhydrine; reproduction de la glycerine (com o sr. FRIEDEL). *C. R.*, t. LXXIV, pag. 805.

— Sur les isomères de la trichlorhydrine (com o sr. CH. FRIEDEL). (Réponse a Mr. BERTHELOT). *Bull. soc. ch.*, (2), t. XVIII, pag. 7.

— Sur la préparation du diisopropyle. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XVIII, pag. 529–530.

— Sur quelques isoméries dans le groupe des composés à 3 atomes de carbone (com o sr. FRIEDEL). *Association française pour l'avancement des sciences*, congrès de Bordeaux, 1872, pag. 375.

1873 — Sur un nouvel alcool tertiaire et sur une méthode de préparation d'une série d'alcools tertiaires. *C. R.*, t. LXXVI, pag. 226.

— Réactions de la pinacone et de le pinacoline (avec M. CH. FRIEDEL). *Bull. soc. ch.*, (2), t. XIX, pag. 98.

— Acide pinacolique et dérivés (com o sr. FRIEDEL). *Bull. soc. ch.*, (2), t. XIX, pag. 146.

— Acide pivalique (com o sr. CH. FRIEDEL). *Bull. soc. ch.*, (2) t. XIX, pag. 196.

— Preparation de la pinacone (com o sr. CH. FRIEDEL). *Bull. soc. ch.*, (2), t. XIX, pag. 289.

---

[1] O chloro dá com o chloreto d'isopropylo dois chloretos; o chloreto d'iodo, aquecido em vasos fechados, com o mesmo corpo, dá um só dichloreto — o chloreto de propyleno.

[2] «O methylchloracetol $CH^3.CCl^2.CH^3$, chlorado ao sol, á sombra, ou pelo chloreto d'iodo, só fornece um trichloreto fervente a 123°, e identico ao que se forma pela fixação do chloro a 0° e á luz sobre o β-chloropropyleno $CH^3.CCl:CH^2$, que é $CH^3.CCl^2.CH^2Cl$.»

1873 — Chloruration du diisopropyle. *Bull. soc. ch.*, (2). t. XIX, pag. 98.
— Action de l'acétate d'argent sur le derivé bibromé du isopropyle. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XIX, pag. 147.
— Action de l'acétate d'argent sur le chlorure du isopropyle $C^6H^{13}Cl$, em presence de l'anhydride acétique. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XIX, pag. 194.
— Alcool methylique produit dans le distillation du formiate de calcium (com o sr. CH. FRIEDEL). *C. R.*, t. LXXVI, pag. 1545; *Bull. soc. ch.*, (2), t. XIX, pag. 481.
— Sur l'acide pivalique et quelques sels et éthers (com o sr. FRIEDEL). *C. R.*, t. LXXVII, pag. 48; *Bull. soc. ch.*, (2), t. XX, pag. 50.
— Synthèse de la glycerine (com o sr. CH. FRIEDEL). *C. R.*, t. LXXVI, pag. 1594; *Bull. soc. ch.*, (2), t. XX, pag. 98.
— Sur la pinacone et sur ses derivés (com o sr. FRIEDEL). Congrés de Lyon, 1873, p. 273.

1874 — Dérivés du diisopropyle. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXII, pag 50.
— Recherches sur le diisopropyle. *Association française pour l'avancement des sciences.* Congrès de Lille, 1874, pag. 288.

1875 — Action des alcools sodés sur le camphre. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXIII, pagg. 230 e 241.
— Action de l'acide iodhydrique à froid sur l'éther. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXIV, pag. 50.
— Action de l'acide iodhydrique sur l'acétone et sur les éthers mixtes. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXIV, pagg. 97 e 482.
— De l'action de l'acide iodhydrique à basses températures sur les éthers propement dits et les éthers mixtes. *Ann. ch. et phys.*, (5), t. VII, pag. 425 e *Assoc. française pour l'avaneement des sciences.* Nantes, 1875, pag. 446. Foi tambem publicada em portuguez no *Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes*, t. V, n.° XIX; Lisboa, 1876, pagg. 168-174.

1876 — Action de l'acide iodhydrique sur l'oxyde méthyléthylique. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXV, pag. 529.

1877 — Synthèse de l'isopropylbenzine. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXVIII, pag. 529.
— Sur quelques composés benzyliques et anisiques. *Assoc. franç. pour l'avanc. des sciences.* Havre, 1877, pag. 374.

1878 — Action de l'acide iodhydrique sur l'acétal méthylique de l'aldéhyde benzoique. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXIX, pag. 145.
— Methylisopropylbenzine obtenue par l'action du chlorure d'isopropyle sur le toluène en présence du chlorure d'aluminium. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXIX, pag. 193.

1879 — Synthèse du diphénylpropane. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXXI, pag. 2.
— Sur la synthese d'un phénylpropane et sur un nouveau mode de formation du dibenzyle. *C. R.*, t. XXXIX, pag. 606.

1880 — Synthèse du diphényldiméthylmethane par le méthylchloracétol et la benzine, cumène, etc. *Bull. soc. ch.*, t. XXXIV, pag. 674.

1881 — Sur la constitution de l'éther glycérique et sur la tranformation de

l'épichlorhydrine en alcool propylique normal. *C. R.*, t. XCIII, pag. 418. Foi tambem publicada em portuguez no *Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes*, t. IX, n.° XXXIII; Lisboa, 1882.

1881 — Action du propylène monochloré sur la benzine. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXXV, pag. 289.

— Produits formés au même temps que le dibenzyle par la méthode au chlorure d'aluminium. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXXVI, pagg. 1 e 24.

— Diphényléthane et éthylbenzine. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXXVI, pag. 66.

— Action de l'acide iodhydrique sur le chloroiodure de propylène et sur le chlorure d'isopropyle. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXXVI, pag. 643. Foi tambem publicada em portuguez no *Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes*, t. IX, n.° XXXIII; Lisboa, 1882.

1882 — Sur la transformation de la glycerine en alcool propylique normal. *Assoc. franç. pour l'avanc. des sciences*. La Rochelle, 1882, pag. 267.

— Lettre à M Dumas sur les laboratoires et l'enseignement pratique de la chimie. *Ann. ch. et de phys.*, (5), t. XXVII, pag. 525; e *Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes*, t. IX, n.° XXXV; Lisboa, 1883.

1884 — Synthèse du diphényléthane par le chlorure d'éthylidène. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XLI, pag. 448.

1885 — Production de quelques hydrocarbures aromatiques: isopropylbenzine, isopropyltoluène. *Bull. soc. eh.*, (2), t. XLIII, pag. 317.

— Substance huileuse accompagnant l'éther glycerique. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XLV, pag. 354.

— Sur un acide provenant de l'action du chlorure de chaux sur l'alcool allylique. *Assoc. franç. pour. l'avanc. des sciences;* Grenoble, 1885, I, pag. 111.

1886 — Dosage volumetrique du zinc, du cadmium, du colbat, du nickel et du cuivre. *Assoc. franç. pour l'avanc. des sciences;* Nancy, 1886, I, pag. 110.

1887 — Analyse du minium. *Assoc. franç. pour l'avanc. des sciences*. Toulouse, 1887, I, pag. 205.

— Sur le dosage du zinc par le procédé de Weil. *Bull. soc. ch.*, (2), t XLVII, pag. 481.

— Sur les travaux d'Ad. Perrot. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XLVII, pag. 657.

DOCUMENTOS

N.º 1

Certidão de idade

JULIO JOSÉ DELGADO, parocho encommendado da freguesia de Nossa Senhora do Rosario na ilha de Santo Antão de Cabo Verde.

Certifico, e juro *in verbo sacerdotis* que vendo o livro 2.º do registo parochial de baptisados d'esta freguesia, nelle encontrei o termo seguinte: aos vinte e sete de março de mil oitocentos e trinta e sete, eu o vigario d'esta egreja matriz baptisei e puz os santos oleos a ROBERTO que nasceu a vinte e cinco de fevereiro, filho legitimo de Francisco José Duarte e Mathilde Rosa da Silva, naturaes d'esta ilha: foram padrinhos Joaquim José Oliveira por procuração de João Hypolito d'Almeida, e Francisca Ferreira Monteiro, natural da Boa-Vista. E para constar fiz este termo que assigno. Santo Antão era *ut supra*. as. O vigario, *Ricardo João de Brito*. E nada mais se continha no dito termo que bem e fielmente copiei do original ficando competentemente averbado.

Ilha de Santo Antão de Cabo Verde, 2 de setembro de 1906.

(a.) *P.º Julio José Delgado.*

N.º 2

Certidão do exame de pharmacia na Escola Medico Cirurgica de Lisboa, em 1857

PEDRO ANTONIO BETTENCOURT RAPOSO, Lente e Secretario da Escola Medico-cirurgica de Lisboa, etc.

Certifico que a folhas 45 do livro 2.º dos termos dos exames dos praticantes pharmaceuticos consta que ROBERTO DUARTE SILVA, filho de Francisco José Duarte, natural da Ilha de Santo Antão de Cabo Verde, fez no dia vinte e um de março de mil oitocentos cincoenta e sete exame de pharmacia e ficou approvado plenamente com louvor.

Secretaria da Escola Medico cirurgica de Lisboa, 11 de outubro de 1905.

(a.) *Pedro Antonio Bettencourt Raposo.*

N.º 3

Relatorio do sr. professor L. TROOST, membro do Instituto, apresentado á Academia das sciencias de Paris, por parte da sua secção de chimica, sobre os trabalhos de ROBERTO DUARTE SILVA (1 de abril de 1886)

Os primeiros trabalhos do sr. R. D. SILVA, chefe do Laboratorio de Analyse geral da Escola Central, datam de 1867.

Tiveram por objecto a producção simultanea dos ammoniacos compostos

do alcool amylico, a formação da propylamina normal e a preparação do oxydo triethylphosphina.

Seguidamente preparou grande numero de etheres do alcool isopropylico, confirmando assim a funcção alcoolica d'este primeiro alcool secundario.

Fazendo reagir o acido iodhydrico gazoso sobre os etheres propriamente ditos e sobre os etheres mixtos, o sr. SILVA conseguiu fixar as regras geraes d'esta acção que, com os etheres propriamente ditos, dá equivalentes eguaes de alcool e de ether iodhydrico correspondente, e, com os etheres mixtos, produz o alcool do radical mais carbonado e o ether iodhydrico do radical menos rico em carbono.

A utilisação do mesmo reagente permittiu lhe resolver um problema até então estudado sem exito por um grande numero de chimicos, e que é o da transformação da glycerina em alcool propylico normal.

Com o methodo geral de synthese dos srs. FRIEDEL e CRAFTS, obteve muitos carbonetos aromaticos interessantes, taes como o cumeno, o cymeno, o dibenzylo, dois diphenylpropanos isomericos, etc.

Foi, emfim o sr. SILVA, durante muitos annos, collaborador dedicado do seu mestre e amigo o sr. FRIEDEL, em numerosos e importantes trabalhos, entre os quaes apenas citaremos a synthese total da glycerina e a descoberta de um acido, isomerico do acido valerico, e identico ao acido trimethylacetico do sr. BOUTLEROW.

A actividade do sr. SILVA tem-se conservado sempre a mesma durante dezoito annos; e a secção de chimica (da Academia das Sciencias de França), considera um dever dar-lhe uma demonstração do seu grande apreço por seus interessantes trabalhos e pela sua perseverança em estudos tão variados.

N.º 4

Noticia publicada no *Interesse Publico* com o titulo — O chimico portuguez ROBERTO DUARTE SILVA

A proposito da candidatura á cadeira de analyse chimica da Escola central de artes e manufacturas de Paris, canditatura d'este nosso benemerito concidadão e chimico distinctissimo, cujo nome illustre é uma honra para Portugal, tão pobre de sabios — e de chimicos — seja dito entre parenthesis, e emquanto não publicamos a biographia d'este sabio portuguez, que mantem com tanto relevo, no estrangeiro, os nossos creditos scientificos, tão decadentes entre nós, por falta de uma conveniente organisação do nosso ensino superior e experimental, damos com o maior prazer, sobre aquelle nosso compatriota, as informações seguintes:

O sr. R. D. SILVA é hoje chefe do laboratorio de analyse geral na Escola central de artes e manufacturas e professor de analyse chimica na Escola de physica e de chimica industriaes da cidade de Paris.

A proposito dos seus trabalhos o notabilissimo chimico o sr. TROOST, n'um parecer lido á Academia das sciencias de França e publicado nos seus *Comptes-rendus* de 21 de dezembro de 1885, declara o seguinte:

(*Segue o relatorio do prof.* TROOST, *já inserido no doc. n.º 3*)

Acrescentaremos que, por proposta da respectiva secção de chimica, o Instituto de França concedeu ao nosso illustre compatriota na sua sessão publica annual de 21 de dezembro de 1885 um premio de 4:000 francos, deduzido das verbas do premio JECKER do mesmo anno.

Dando noticia d'estes factos, tão gratamente lisongeiros para os que amam a sua pátria, perguntamos apenas: — A este portuguez, tão obscuro entre nós quanto illustre lá fóra, a este homem, o unico que hoje representa

no estrangeiro, com verdadeiro e indiscutivel brilho, a sciencia portugueza, a este concidadão benemerito, a quem Portugal não poude crear uma situação proporcionada ao seu talento e justificada pelos seus serviços, que testemenhos de apreço e reconhecimento temos nós dado até hoje?

Nenhuns ou bem poucos, provavelmente...

Embora o sr. SILVA, na alta posição social e scientifica, que occupa em Paris, não precise, é claro, para engrandecer-se, das veneras e fitas portuguezas, julgamos no entanto que, n'uma epocha em que tantos as usam, por toda a parte, descarada e descabelladamente, sem o menor titulo de recommendação que as justifique, seria digno e decente — e honroso para Portugal — que os nossos governos deixassem de vez em quando o triste costume, em que se poseram, de só condecorarem quasi sempre quem pede semelhantes distinctivos ou quem possa... retribuil-os prompta e largamente.

O sr. R. D. SILVA é irmão de um distinctissimo pharmaceutico de Cabo-Verde o nosso particular amigo, o sr. Antonio Duarte Silva [1].

(De *O Interesse Publico,* de 6 de julho de 1886).

N.º 5

Apontamentos biographicos sobre ROBERTO DUARTE SILVA, publicados na *Revista Intellectual Contemporanea*, sob o titulo — Um sabio portuguez, ROBERTO DUARTE SILVA — e transcripto no *Jornal da Sociedade pharmaceutica lusitana* de maio de 1888

Entre os portuguezes que, por assignalado merito e por importantes trabalhos scientificos, honram a patria e não a deixam entre estranhos esquecida e ignorada, citaremos o nosso illustre chimico e celebrado professor parisiense o sr. ROBERTO DUARTE SILVA.

Não pretendendo fazer uma biographia d'este nosso illustre compatriota, porque nos escasseiam elementos para isso, limitamo-nos a alguns apontamentos, ha pouco obtidos de um amigo e collaborador nosso.

Nasceu o sr. ROBERTO DUARTE SILVA em 25 de fevereiro de 1837, na villa da Ribeira Grande, ilha de Santo Antão, sendo seus paes os srs. Francisco José Duarte e D. Mathilde Rosa Silva.

Tinha o nosso distinctissimo patricio dez annos, quando o seu pae o entregou á direcção de um habil pharmaceutico, recentemente estabelecido em Santo Antão, para praticar na sua pharmacia.

Esse homem honrado e bondoso, que tanta influencia devia ter na vida do futuro chimico, era Antonio Gonçalves de Almeida Rhino,

Logo se distinguiu o novel praticante por um incansavel desejo de saber, e um aturado amor ao estudo e, apesar da sua tenra edade, por relevantes serviços prestados durante uma epidemia.

Almeida Rhino, que presentia um brilhante futuro para o seu protegido, mandou-o estudar a Portugal (1854). Esta viagem satisfazia decerto uma das muitas aspirações do estudioso mancebo, retemperava-o de forças e de coragem para continuar na sua carreira, depois do crudelissimo golpe que o ferira profundamente, a morte de seu pae.

---

[1] É auctor deste artigo o fallecido lente de chimica da Escola Polytechnica de Lisboa, dr. JOSÉ JULIO RODRIGUES.

Chegado a Lisboa, Roberto Silva residiu na pharmacia da viuva Rhino, e seguiu os seus estudos theoricos debaixo da direcção do conhecido pharmaceutico João José de Sousa Telles.

Um anno apenas, depois de saír de Santo Antão, falleceu alli o seu protector que o não esquecera. contribuindo — *post-mortem* — para a continuação dos seus estudos, como ultima lembrança de amizade.

Depois de estudar ainda na pharmacia dos srs. Antonio Feliciano Alves d'Azevedo & Filhos, fez com distincção em 1858 (1), o seu exame pharmaceutico, merecendo os louvores do jury, no acto do exame.

Se, porém, uma carreira honrada e um futuro certo sorriam ao distincto moço, era ferido de novo, no mais das suas affeições, pelo fallecimento de sua mãe, que uma epidemia de cholera, dizimando a gente de Santo Antão, ceifara longe d'elle.

Vamos agora encontrar o nosso biographado em Macau, onde se demora tres annos, e em seguida estabelecido em Hong-Kong, de sociedade com um medico francez. Ahi, se um desmedido trabalho lhe permittiu adquirir uma pequena fortuna, uma pertinaz doença, filha do mesmo trabalho, obriga-o dois annos depois, em 1862, a regressar a Portugal.

Na China, Roberto Duarte Silva adquiriu muitos amigos entre os francezes que andavam n'esse tempo em Hong-Kong e, por instancias de alguns d'elles, passou a França, pouco tempo depois da sua chegada a Portugal.

Em Paris, n'esse grande centro onde tanto abundam os meios de instrucção e de aperfeiçoamento, Roberto Duarte Silva prosegue com ardor nos seus estudos favoritos. Estuda com Wurtz, Langlebert e Dorvault, adquirindo geral estima e muita consideração como homem de sciencia e de futuro. Nada é capaz de desviar o illustre moço dos seus estudos predilectos — nem os seus negocios particulares, nem a perda de uma parte das suas economias, sepultadas nos azares d'uma casa de commercio ingleza. Em breve obtem o grau de licenciado em sciencias, e pouco depois é nomeado chefe dos trabalhos de analyse chimica da Escola de artes e manufacturas, e professor da cadeira de chimica e physica industriaes da municipalidade de Paris. Desde então a sua carreira scientifica, como professor e como chimico, tem sido das mais distinctas.

Como professor, tem a palavra extremamente facil e sempre correcta, tornando-se notavel a sua facilidade de allocução elegante e graciosa. Como chimico, entregamos a sua apreciação ao distinctissimo sabio francez o sr. Troost que, n'um parecer lido á Academia das sciencias de França e publicado nos seus *Comptes-rendus* de 21 de dezembro de 1885, declara o seguinte:

(*Segue o relatorio inserido no doc. n.º 3*)

Foi em Paris, no decurso dos seus trabalhos, que uma violenta explosão fez perder ao illustre experimentador o uso de um olho.

Os francezes têm distinguido o nosso compatriota: é membro da Sociedade chimica de Paris e da Sociedade franceza para o adiantamento das sciencias.

A patria tambem não o tem esquecido: é socio correspondende da Academia Real das Sciencias e socio honorario da Sociedade Pharmaceutica Lusitana.

Ha dias foi agraciado com o grau de commendador da Ordem de S. Thiago.

Das suas qualidades particulares diremos que, como filho, era a gloria

(1) Foi approvado com louvor no exame de pharmacia em 21 de março de 1857.

e satisfação de seus paes, que teve a infelicidade de perder tão cedo, mantendo-se intacto o culto e respeito pela sua memoria; como irmão foi sempre dedicado e extremoso, devendo-lhe a educação o sr. Antonio Duarte Silva, hoje distincto pharmaceutico em S. Vicente.

Como homem distingue-se pela sua honradez e probidade de caracter, pelo seu trato agradavel, e pelo tom variado da sua conversação insinuante e instructiva, reflexo de uma brilhante intelligencia e de uma solida instrucção.

E, com todos estes distinctissimos dotes e qualidades, affirma o sr. R. D. Silva um talento de primeira grandeza, um trabalho constante e meritissimo, um coração limpo e uma consciencia de homem de bem [1].

(*Revista intellectual contemporanea*, n.º 6, pagg. 46 a 48; publicação adstricta ao jornal *O interesse publico*, 1886).

N.º 6

Noticias sobre a morte de Roberto Duarte Silva

1

Por um telegramma recebido de Paris pelo nosso amigo senhor José Julio Rodrigues, teve-se em Lisboa a triste noticia do fallecimento de Roberto Duarte Silva, professor de chimica analytica na Escola central de Paris e um dos portuguezes que mais têem honrado no estrangeiro a nossa patria pelo seu trabalho, pelo seu talento, pela sua probidade e pela sua perseverança.

Homem bom e homem de bem, Roberto Duarte Silva, occupava um logar proeminente na sciencia chimica e seria de certo em poucos annos membro do Instituto de França, se a enorme fadiga, a que se não poupava, para ser um professor modelo e um verdadeiro sabio, o não tivesse tão cedo roubado á estima universal e ao affecto de sens amigos. D'elle dizia ha poucos mezes o eminente professor Schloesing, que no seu rosto e no seu porte se poderia ver e apreciar o homem perfeitamente probo.

Que a memoria do nosso eminente patricio seja sempre acompanhada na patria que elle sempre acarinhou, pela estima de todos nós que n'elle encontramos, por tão largos annos, um estimulo e um exemplo tão digno de imitação e de registo.

Brevemente será publicada uma biographia d'este homem eminente, honra do nome portuguez.

(*Diario de Noticias*, de 11 de fevereiro de 1889, sob o titulo *Morte dum portuguez illustre*).

2

Por noticia telegraphica, recebida ante-hontem em Lisboa, soube-se que falleceu em Paris o notavel chimico sr. Roberto Duarte Silva, professor da cadeira de analyse chimica na Escola central d'aquella cidade, onde suc-

[1] É tambem auctor d'este artigo o mesmo prof. dr. José Julio Rodrigues.

cedera ao celebre M. DUMAS e para concorrer á qual tivera que naturalisar-se cidadão francez.

Era o illustre homem de sciencia uma das mais distinctas individualidades do professorado scientifico moderno, sendo altamente considerado e respeitado entre os seus collegas, não só pelos seus brilhantes talentos, mas tambem pelas suas apreciaveis qualidades como homem trabalhador, esclarecido e honesto.

O sr. ROBERTO DUARTE SILVA nascera na ilha de Santo Antão, do archipelago de Cabo Verde, onde ainda tem parentes. Ha muitos annos que vivia em França, onde estabelecera um laboratorio, tendo conquistado cedo a mais honrosa reputação pela importancia e alcance dos seus estudos e dos seus trabalhos.

No seu entranhado amor pela sciencia, o sr. ROBERTO DUARTE SILVA soffrera as maiores privações, luctando com sérias difficuldades para fazer a sua carreira.

Agora que o logar de professor lhe assegurava um certo bem estar relativo, a morte veio surprehendel-o, inutilisando o glorioso futuro que o esperava e que, felicitando-o a elle, daria novo lustre ao nome portuguez.

O sr. ROBERTO DUARTE SILVA fôra agraciado ha dois annos pelo governo portuguez, por honrosa sollicitação do sr. conselheiro Henrique Macedo, com a commenda da Ordem de S. Thiago. O anno passado o sr. conselheiro Marianno de Carvalho, penhorado por alguns serviços valiosos pelo benemerito professor prestados ao nosso paiz, offereceu-lhe, por intermedio do sr. conselheiro José Julio Rodrigues, um bello relogio de ouro com um monogramma e dedicatoria.

Estes simples factos provam como o illustre professor era considerado e estimado pelos seus collegas de Portugal. Tanto o sr. Henrique de Macedo, como os srs. Marianno de Carvalho e José Julio Rodrigues, são lentes da Escola Polytechnica de Lisboa. O nosso mallogrado amigo sr. conselheiro Antonio Augusto d'Aguiar, outro eminente professor, tambem tinha em grande conta o notavel chimico, com cuja amizade se honrava.

O sr. ROBERTO DUARTE SILVA tinha apenas 52 annos d'idade e morreu pobre.

A sua morte deve ter causado profunda impressão em Paris, onde o illustre portuguez era muito considerado e estimado, como é sentida sinceramente em Portugal por quantos o conheciam e admiravam.

O governo ordenou telegraphicamente á legação portugueza em Paris que se fizesse representar no sahimento.

(*Commercio de Portugal*, de 12 de fevereiro de 1889).

3

Depois de uma noticia, em que se reproduzem os factos constantes da anterior, lê-se o seguinte:

O conselheiro José Julio Rodrigues parece que vae escrever uma longa biographia do erudito professor. Mais se diz que o governo ordenará o levantamento de um mausoleo no sitio onde o cadaver descauça.

Aos seus os nossos pezames de amigo e de portuguez.

(*Correio de Portugal*, de 23 de fevereiro de 1889).

N.º 7

Homenagem da Sociedade Pharmaceutica Lusitana

A Sociedade Phamaceutica Lusitana resolveu encerrar, após a leitura da acta, a sua sessão de hontem, em signal de sentimento pela morte do pharmaceutico Roberto Duarte Silva, o eminente chimico e professor ha pouco fallecido em Paris.

Este benemerito era socio da sociedade e estava em intimas relações com ella, enviando-lhe sempre os seus notaveis trabalhos de chimica.

(*Diario de Noticias,* de 14 de fevereiro de 1899).

N.º 8

Discurso proferido por C. Friedel, do Instituto de França, perante o feretro de R. D. Silva, em 11 de fevereiro de 1889

(Traducção)

Meus senhores: Se obedecesse apenas aos dolorosissimos sentimentos e ao profundissimo luto que me domina e prende em face d'este tumulo, deveria conservar-me silencioso. A memoria, porém, do amigo dedicado, que perdi, impõe-me a obrigação de patentear a quantos o conheceram e estimaram, a todos os seus amigos, quanto elle era digno de affecto e de respeito pela elevação dos seus sentimentos, pela honestidade do seu espirito, pelo seu culto e obediencia a todos os preceitos do dever. Testemunha de metade da sua existencia, seu collaborador e seu amigo, a tanto devo o conhecel-o mais que muitos outros e o apreciar, por isso mesmo, mais intimamente a sua alma tão altiva quanto modesta, e cujos soffrimentos intimos eram, não raro, escondidos ainda aos seus mais queridos e predilectos.

Silva, em verdade, não foi feliz, a despeito de triumphos grangeados por um trabalho obstinado, mantido por uma vontade inflexivel, a despeito mesmo de amigos fieis, que o acompanharam até ao seu ultimo suspiro.

Nascido em Santo Antão, uma das ilhas de Cabo Verde, de que ainda ha pouco fallava entre soffrimentos e cansaços, consequencia de uma doença rebelde, com o enthusiasmo e a poesia que envolvem as recordações da mocidade e as saudades do paiz natal, estudou em Lisboa, estabelecendo-se mais tarde na China, onde passou quatro annos como pharmaceutico.

Estava ainda n'esse paiz quando se realisou a nossa expedição ali; e, em momentos em que ao nosso exercito faltaram medicamentos indispensaveis, taes serviços lhe prestou e com tão largo desinteresse, que desde logo teve e obteve por amigos, que sempre o foram depois, os facultativos militares, com quem d'esta arte se relacionou.

Mais tarde, impellido e dominado por um ardente amor pela sciencia, bebido principalmente na leitura das obras de Dumas, grangeados os meios que cuidava necessarios para o exito de seus projectos, vem a Paris — aprender.

Corria então o anno de 1863. E muito tinha que aprender, com effeito, começando pela lingua do paiz que procurára.

Não era, porém, homem que desanimasse; e, a breve trecho, fazia os seus exames de bacharelado e os de licenciado em sciencias physicas. Frequentou o laboratorio de Wurtz, onde o encontrei pela primeira vez, prendendo-me logo pelo seu ar sério e dedicação pelo estudo, e depois o laboratorio de Pisani.

Em 1867 publicou o seu primeiro trabalho original, seguido depois de muitos outros.

Não me cumpre analysal-os aqui, nem é este, para tal fim, o logar mais proprio; direi sempre, todavia, que todos revelam o mesmo escrupulo no estudo e grangearam para o seu auctor a intima satisfação, que é a primeira recompensa de quem investiga.

O alto apreço em que os teve a Academia das sciencias da França, concedendo a R. D. Silva o premio Jecker, a eleição d'este para presidente da sociedade chimica de Paris, a sua nomeação de membro correspondente da academia das sciencias de Lisboa e as distincções honorificas que lhes foram concedidas pela França e por Portugal, patenteiam bem claro o valor em que foram tidos por juizes competentes os trabalhos d'aquelle distinctissimo professor. Posso bem asseverar-vos que elle era então feliz, na plenitude da sua actividade scientifica, durante uma collaboração, que durou tres annos, e que ainda mais estreitou os laços que já nos prendiam.

Na febre de trabalho fugiu-lhe, porém, a modesta fortuna que possuia, malbaratada por infieis depositarios; e, conjunctamente, um triste fracasso de laboratorio, depois de o ter affectado, grave e dolorosamente, por muito tempo, teve como resultado a perda de um dos olhos.

Esvaida a possibilidade de uma vida desafogada, ás suas investigações scientificas tornava-se mister, d'ora avante, associar o trabalho com que assegurasse o pão de cada dia Tendo vagado por essa occasião um logar de chefe dos trabalhos de chimica analytica na Escola central foi Silva quem o obteve.

Poder-se-ia suppor a principio que lhe fossem compativeis os encargos de sua posição official e os seus trabalhos scientificos anteriores, e assim succedeu na verdade até certo ponto.

A exagerada delicadeza, porém, da sua consciencia, não lhe permittiu, quasi em seguida, que distrahisse a sua attenção para assumptos que não fossem os das suas conferencias profissionaes de chimica analytica e os das manipulações que se lhes referiam, tudo accumulado com o exame e correcção dos relatorios manuscriptos dos alumnos sobre as analyses que lhes eram incumbidas.

Comtudo era grande o seu desgosto por se conservar affastado das suas investigações e pesquizas. Aspirava a recomeçal-as.

Não consentiu, porém, o destino que o fizesse por absoluta impossibilidade material, ou apenas lhe forneceu o ensejo por que aspirava, quando as forças e a saude lhe eram já, para isso, de todo insufficientes.

Organizára por forma tão correcta o ensino da analyse chimica na Escola central que, ao instituir-se a Escola municipal de chimica e de physica, foi logo indigitado o seu nome para professor de chimica analytica. E por tres annos amplamente satisfez a este duplo encargo com zelo egual, e nunca desmentido, em qualquer d'aquelles institutos.

A trabalho tão excessivo correspondeu, porém, quasi que a ruina da sua já tão precaria saude.

Vagando mais tarde, em 1886, a cadeira de chimica analytica da Escola central, o conselho d'esta escola escolheu a Roberto Duarte Silva para a reger em tirocinio.

Entregue de corpo e alma a este novo serviço, resignou, para melhor o cumprir, o seu posto na Escola de chimica e de physica; e, ao ser, dois

annos mais tarde, nomeado lente cathedratico d'aquelle curso, deviam ficar de certo com isso satisfeitas as suas tão legitimas aspirações!

Triste fatalidade, porém! O premio de tantos e tão porfiados sacrificios e trabalhos chegára tarde. A saude, quasi extincta, reclamava os maximos cuidados.

Procurando melhorar em Cauterets, onde se tratou durante as ultimas ferias, reappareceu-nos tão doente e alquebrado, que nós, os seus amigos a nós mesmos nos perguntavamos se seria possivel que SILVA fizesse, n'aquelle estado, a sua primeira lição.

Porque, é preciso dizer-vos: SILVA nunca permittiu que lhe fallassem em viagens que obstassem á regencia dos seus cursos, nem de substituição provisoria aos seus encargos officiaes.

Com surpreza de todos, no entanto, substituindo-lhe as forças physicas quasi perdidas o vigor do seu espirito, logrou desempenhar-se de suas obrigações escolares até fins de dezembro findo, apparentemente mais vigoroso que nos primeiros dias do seu ultimo curso. Em seguida, porém, a breves dias de repouso, durante o qual se nos afigurava mais abatido que antes, deu ainda algumas lições, espacejadas pela benevolencia da direcção da Escola central, lições escutadas com emoção por seus discipulos, que, em presença do seu mestre, para elles bem proximo da morte, piedosamente dissimulavam a difficuldade que sentiam para ouvil-o. E ainda não ha 15 dias que SILVA proferiu a sua ultima lição, sabe Deus á custa de que enormes e não confessadas fadigas?...

SILVA morreu, pois, sobre a brecha, sacrificando a sua vida ao cumprimento do seu dever.

Se alegrias houve na sua existencia, tão dignamente preenchida, exceptuando as que lhe resultaram de ser justamente apreciado pelos que amava e admirava, foram ellas, apenas, as alegrias austeras do sacrificio, do trabalho, da dedicação, do dever cumprido até o seu extremo limite, alegrias filhas de serviços sempre generosamente distribuidos por todos quantos tiveram a fortuna de conviver com elle.

N'elle havia ainda, para que taes e tão intimas satisfações podessem prevalecer a todas as outras, um profundo sentimento religioso que, sem o prender a qualquer culto externo, o amparou sempre nos seus soffrimentos, e lhe fez constantemente antever para além da vida terrestre, como que o *desideratum* e o premio da lucta que acompanha e attribula a triste vida humana.

Descança, agora, no eterno repouso, esse trabalhador illustre, legando-nos a todos um grande exemplo e as mais profundas saudades.

N.º 9

Noticias sobre os obsequios funebres em honra de ROBERTO DUARTE SILVA

1

O enterro d'este nosso sabio compatriota verificou-se em Paris no dia 11, sendo os officios funebres resados na egreja de Saint-Severin, ao meio dia. Presidiu ao sahimento o sr. FRIEDEL, membro do Instituto de França e intimo amigo do finado, e acompanharam-n'o as primeiras summidades das escolas de Paris. A Escola polytechnica de Lisboa fez-se representar na triste cerimonia.

Os convites da parte de sua familia e de seus amigos enumeravam os seguintes titulos do eminente e deplorado conterraneo, que se fez francez para melhor servir a sciencia e o seu paiz: ROBERTO DUARTE SILVA, professor de chimica analytica na Escola central de artes e manufacturas, antigo professor de chimica na Escola municipal de physica e de chimica da cidade de Paris, antigo presidente da Sociedade chimica de Paris, membro da Academia das sciencias de Lisboa, etc.; cavalleiro da Legião de Honra, commendador da Ordem de S. Thiago de Portugal, etc., fallecido em 9 de fevereiro de 1889, em uma casa na rua Thenard, 6, na edade de 51 annos.

O enterro foi no cemiterio do Mont Parnasse.

(*Diario de Noticias*, de 15 de fevereiro de 1889, sob o titulo ROBERTO DUARTE SILVA).

2

Publicamos em seguida a traducção do eloquente e sentidissimo discurso, pronunciado pelo celebre chimico francez, o sr. CH. FRIEDEL, junto do tumulo do nosso mallogrado compatriota, e em presença das maiores summidades do professorado e da sciencia franceza. A posteridade, que principiou para aquelle portuguez illustre, «que deixou á França um grande exemplo e profundissimas saudades», faz-lhe desde já a justiça, a que tinham jus o seu grande merito e o seu purissimo caracter. É mister, porém, que se não regatêem agora ao portuguez benemerito, que tanto está honrando, ainda — *post mortem* —, o paiz em que nasceu, as homenagens a que tem jus.

Que Portugal lhe erija o tumulo, onde repousa, já que não soube ou não poude aquilatal-o sufficientemente em vida.

É uma divida a que urge immediato pagamento, e confiamos do alto patriotismo e illustração do sr. Barros Gomes, que o fará, como é dever nosso e na conformidade do sentimento publico, que o applaude e o requer.

(*Segue o discurso de* FRIEDEL, *que é o doc. n.º 8*).

(*Diario de Noticias*, de 21 de fevereiro de 1889, sob o titulo — *Um portuguez benemerito,* ROBERTO DUARTE SILVA).

N.º 10

Homenagem prestada pela Camara Municipal do concelho da Ribeira Grande, da Ilha de Santo Antão, á memoria de ROBERTO DUARTE SILVA

A Camara municipal do concelho de Santo Antão acaba de honrar-se, reunindo em sessão extraordinaria apenas ali constou o passamento do seu conterraneo o sr. ROBERTO DUARTE SILVA, fallecido em Paris, onde honrou sempre a nação e engrandeceu o seu nome, que era respeitado e considerado por todos os que estudam e trabalham.

Orgulhando-nos de ver como a Camara municipal se ennobreceu, publicamos em seguida a acta d'aquella sessão. Corre-nos o dever de registrar

aqui a ultima homenagem prestada pela ilha de Santo Antão ao seu filho dilecto e benemerito.

Acta

Anno do Nascimento de N. S. Jesus Christo de 1889, aos 16 dias de fevereiro, n'esta villa D. Maria Pia, da ilha de Santo Antão e sala das sessões da Camara municipal, presentes os srs. Joaquim Ignacio Ferreira Nobre, presidente; Antão Victorino Ferreira, Antonio José de Lima, João Zacharias de Mello e Aurelio Antonio Martins, bem como o sr. administrador do concelho Francisco Tavares d'Almeida comigo Diocleciano Nobre, escrivão da administração do concelho, no impedimento do respectivo.

Aberta a sessão pelo sr. presidente, foi dito que acabava de ter a noticia do fallecimento de ROBERTO DUARTE SILVA, facto que teve logar em Paris no dia 9 do corrente; que o illustre morto era natural d'esta ilha, um dos seus filhos mais dilectos, e um d'aquelles que mais a tinham ennobrecido, pela eminencia da sua posição social e pelo seu altissimo valor scientifico; que elle presidente não pretendia fazer o elogio funebre de um cidadão tão notavel, mas não podia deixar de referir alguns factos da sua vida gloriosa para justificar assim o seu proposito; que ninguem visse nas suas palavras outro sentido que não fosse o de fazer justiça, e que nem podia haver vaidade nem lisonja perante a fria pedra tumular; que nunca era demais o preito e a homenagem á memoria dos homens illustres, e aquelle de que está tratando tinha todos os predicados para se impôr ao respeito e á veneração publica; que as portas de um tumulo eram sempre as portas da historia, e que esta havia de ser justa nas apreciações d'aquelle que já agora era um vulto seu.

Elle presidente ia dizer o que era do conhecimento de todos, mas não queria que se suppozesse que ficando callado se esquecia em momento tão solemne d'um compatriota tão distincto; que foi á custa do trabalho nobre e honrado, servindo o seu paiz com elevada intelligencia, que DUARTE SILVA poude alcançar os meios de fortuna, indispensaveis para completar a sua educação scientifica; e foi em Paris, onde tudo é grande e nobre, que elle desvendou os segredos e os mysterios da sciencia, applicando-se principalmente ao estudo da chimica em gue chegou a ser um sabio admirado e respeitado por todos os homens notaveis nacionaes e estrangeiros, em cujo numero, e como um dos mais fanaticos admiradores, se encontrava uma das mais elevadas capacidades do nosso paiz o grande estadista, o eminente parlamentar, o distincto professor Antonio Augusto de Aguiar, cuja perda ha de ser sempre geralmente sentida. N'estas condições, elle presidente, parecendo-lhe interpretar bem o sentimento da camara, era de opinião que esta sessão, a primeira depois da noticia de que dá conhecimento, fosse inteiramente consagrada á memoria do glorioso patricio, como preito e homenagem á sus honestidade e ao seu saber; que para honrar o seu nome lhe bastava a immortalidade da historia, cujas portas se lhe acabavam de abrir, mas elle presidente entendia que era preciso mostrar ao mundo civilisado que os povos d'esta ilha sabem venerar a memoria dos filhos que ennobreceram a sua patria, e assim propunha:

1.° Qne se lançasse na acta um voto de profundo sentimento pela irreparavel perda d'um compatriota tão distincto.

2.° Que se promovesse por todos os meios adequados uma subscripção publica para erigir um monumento em honra do seu nome, ou para obter a trasladação do seu cadaver, encerrando-o em tumulo condigno, satisfazendo assim um dos seus ultimos desejos.

3.° Que se levantasse a sessão em signal de luto e em homenagem ao illustre finado.
4.° Finalmente que da acta d'asta sessão se tirassem duas copias, uma para ser enviada ao seu unico irmão, Antonio Duarte Silva, e outra para ser publicada no Boletim Official da provincia, impetrando-se para isso a previa auctorisação.
A camara, compenetrada do elevado sentimento que dictava as palavras do seu presidente, approvou por acclamação as suas propostas, reservando-se para opportunamente resolver ácerca do monumento destinado a perpetuar a memoria d'um compatriota que tanto honrou a sua patria; e levantou a sessão.

(a) *Joaquim Ignacio Ferreira Nobre, Antão Victorino Ferreira, Antonio José de Lima, João Zacharias de Mello* e *Aurelio Antonio Martins*. O escrivão, *Diocleciano Nobre*.

(*Correio de Portugal*, de 18 de março de 1889).

N.° 11

O testamento de ROBERTO DUARTE SILVA feito em Paris a 22 de abril de 1884

Paris, 4 place de la Sorbonne, le 22 abril 1884.

Mon cher monsieur Friedel et vénéré Maître

J'ai voulu depuis longtemps consigner dans une lettre quelques dispositions devant servir de testament et j'en ai été empêché par mes constantes occupations. Je vais consigner maintenant dans ces lignes que j'écris pour l'Angleterre mes dispositions testamentaires.
Je lègue à Société chimique de Paris:
Tous mes livres, y compris les bibliothèques, aussi le peu de fortune que je possède en valeurs deposées à la Société de Depots et de Comptes Courants, 2 place de l'Opéra à Paris, apres avoir payé:
A M.me Fœrster, la veille femme de ménage qui me sert depuis quelques années, la somme de 1.500 fr.
Et avoir payé une petite dête que j'ai chez mon tailleur Mr. Moovot 28, rue Vivienne, dête, qui provient de ce que je n'ai pu règler mes comptes avec Mr. Moovot, faute de temps pour chercher les reçus d'argent remis.
Aussi une petite dête a Mr. Rabasse, 10, rue des Archives.
Et une petite dête a mes amis de Lisbonne MM. Antonio Feliciano Alves d'Azevedo, Filhos, 31, Praça de D. Pedro.
Je laisse à mon neveu et filleul Roberto Duarte Silva Junior, fils de mon frère Joaquim Duarte Silva, décédé, toutes les petites terres qui me viennent de mon père et de ma mère à l'ile Santo Antão, archipel du Cap Vert.
Les objects de menage et mon linge et les quelques meubles seront donnés à M.me Fœrster.
Vous, mon excellent Maître, vous devrez prendre toutes mes petites chinoiseries et donner à mon excellent ami, Mr. de Clermont, deux caisses

de chinoiseries, que me seront expediées de Chine très prochainement, ce pourquoi j'ai envoyé dernièrement environ 200 fr.

A mon ami Grisou de la maison Clin & C.ie, je vous prie de donner les deux vases de porcelaine de Chine, qui sont dans ma chambre à coucher et ont des oiseaux.

A mon ami Louis Perrot, l'actuel économe de l'École Centrale une obligation de la Ville de Paris, que j'ai à la Société de Depots et Comptes Courants.

Outre les valeurs qui se trouvent à la Société de Depots, il y a à la Pharmacie Centrale, 7, rue de Joly, pour 2.000 fr. d'actions ou obligations qui m'appartiennent.

Dans le tiroir du cartonnier, qui est tout près de la porte, marque R D. S., se trouvent des papiers, qui interessent mes affaires; mais il y a là aussi un paquet cacheté contenant des *lettres intimes que personne ne doit lire*. Vous, mon cher Monsieur Friedel et mon excellent ami Mr. de Clermont, vous *brulerez le paquet tel est*.

Voilà, mon excellent Maître, ma volonté et je confie dans votre si grande et paternelle bienveillance de tout faire executer.

Je vous dis adieu, mon vénéré Maître et à M me Friedel et vos chers enfants, sans oublier mon jeune ami Jean. Je me rappelle au bon souvenir de tous mes amis, surtout M. et M.me de Clermont, et je prie Dieu de vous conserver et de vous bénir!

Recevez l'expression de la plus vive reconnaissance de votre élève qui vous vénère

(signé) ROBERTO DUARTE SILVA

ou R. D. SILVA.

P. S. Mes signatures se trouvent chez le notaire de la rue Condé et aussi au Consulat général de Portugal.

(signé) R. D. SILVA.

N.º 12

Carta que ROBERTO DUARTE SILVA escreveu a seu irmão Antonio Duarte Silva, em 1 de fevereiro de 1889, oito dias antes da sua morte

Paris, 1.º de fevereiro de 1889.

Meu caro Antonio

Recebi com prazer a tua carta de 6 do mez passado. Agradeço muito a tua attenção.

Estimo que os teus negocios continuem como presentemente. Não te queixes da sorte, pois a residencia de S. Vicente não deve ser nada desagradavel, e és o unico pharmaceutico da ilha. Se quizeres trabalhar, deves ahi viver agradavelmente.

Tenho o pezar de te dizer que estou muito doente ha já 8 mezes e com pouca esperança de me restabelecer: tenho uma terrivel doença do estomago, e, o que é muito peior, o pulmão esquerdo atacado; n'estas condi-

ções preciso em breve dispôr das minhas cousas e fazer o meu testamento.

Para isto preciso que me envies pelo primeiro vapor a lista das terras que me vêm do patrimonio de nossos paes. Desejo saber onde estão situadas, de que são cultivadas, etc., e bem entendido tambem os preços por que forão estimadas e os que representão hoje.

Quem recebe os productos d'estas terras? Não faço estes pedidos, bem entendido, para exigir cousa alguma.

Tenho muita pena do estado de minha saude; porque o meu grande desejo fôra ir passar o resto da minha vida em Santo Antão, n'uma pequena propriedade, que comprasse, bem situada e com uma caza. Lá queria eu ter laranjeiras, alguns pés de café, muita bananeira, papaeira, etc., que me lembrassem uma pequena parte da minha dura mocidade.

Inclino-me deante da vontade de Deus!

Tem saude e os teus e recebe um abraço de

Teu irmão

R. D. SILVA.

P. S. Manda-me o mais *breve possivel* a lista que te peço.

N.º 13

Episodio de viagem,
com ROBERTO DUARTE SILVA, narrado pelo sr. Rangel de Lima

Foi em 1888. Eu acompanhava uma das mais conhecidas familias de Lisboa em viagem pela Hespanha, França e Suissa. Depois de estarmos uma semana em Madrid, fomos d'aquella capital a Bordeus, onde nos deviamos demorar poucos dias, para, em seguida, passarmos uma temporada em Paris e de lá partirmos para Lucerne.

Em Handaya, quando mudámos de comboio, occupámos uma carruagem composta de dois compartimentos, que se communicavam por uma estreita porta. N'um dos compartimentos tomei logar com os pais e a avó de duas meninas: uma que apenas balbuciava raras palavras; outra, dos seus dez ou doze annos, muito sagaz, muito intelligente, fallando já com facilidade algumas linguas estrangeiras. No compartimento contiguo ao nosso iam as duas meninas — a mais nova acompanhada por uma criada antiga da casa, a mais velha por uma *institutrice* allemã, bastante instruida, fallando tambem as principaes linguas vivas.

Chegado o comboio a Biarritz, entrou no compartimento em que viajavam as meninas um homem já certa idade. Do meu logar vi-o assentar-se em frente da menina mais velha e da mestra.

Confesso que estranhei o todo um tanto original d'aquelle viajante. Completamente vestido de preto — ampla sobrecazaca, laço de seda, chapeu alto e luvas de pellica — o seu rosto, em que transparecia, é certo, uma tal ou qual expressão de bondade e bonhomia attrahente, offerecia, comtudo, um verdadeiro contraste com o dos viajantes que, de ordinario, se encoutram n'aquellas paragens. De uma côr baça, olhar meigo, nariz um tanto achatado, bigode de guias compridas e cahidas, não parecia um europeu. O fato preto que trajava e o chapeu alto a occultar-lhe uma cabelleira basta e

toda annelada, como depois se viu, tornavam a sua physionomia ainda mais soturna, dando-lhe ares de um funccionario indigena de qualquer provincia ultramarina.

A menina mais velha da já citada familia não passou despercebido o estranho aspecto do recem-chegado; pelo que, depois de o mirar e remirar, voltando-se para a *institutrice* que parecia ter ficado, como a discipula, tambem impressionada pela presença do novo companheiro de viagem, disse-lhe, em inglez, com a desculpavel imprudencia de uma creança:

— Parece um chinez de luto, vestido á europea. É a primeira vez que vejo um homem assim!

A mestra sorriu-se e não respondeu; mas no seu sorriso mostrou concordar plenamente com a opinião da discipula.

O nosso homem, impassivel, conservando o seu ar bondoso, tira, momentos depois, do bolso da sobrecasaca uma charuteira, da charuteira um charuto, e, dirigindo-se com a mais perfeita cortezia á menina e á mestra pergunta-lhes, em correctissimo inglez, se as não incommoda o fumo do charuto.

A perturbação das duas foi de tal ordem que não se atreveram a responder ao seu interlocutor. Apenas a menina, vexadissima, teve animo para dizer á mestra, em allemão:

— Então o chinez de luto não se me sáe a fallar inglez como um inglez!

E o chinez de luto que falava inglez como um inglez, vendo que as duas não respondiam á sua pergunta, observa-lhes em puro allemão:

— Visto que não se oppõem, accenderei o meu charuto.

O assombro da pobre menina ao ouvir aquellas palavras foi ainda maior que o da mestra. Fez-se de mil cores, e tão perturbada ficou por um momento, que a criada que acompanhava a irmã mais nova correu pressurosa para ella, julgando que lhe ia dar algùma coisa.

A menina, porém, cobrando novamente animo, disse á creada, que era portugueza e não fallava outra lingua senão a sua:

— Não é nada, Conceição, não te assustes. Succede-me com este homem uma coisa... Logo te contarei.

N'isto, o comboio pára na estação de Bayonna.

Eu, percebendo que se passava o que quer que fosse de extraordinario no compartimento vizinho, levantei-me do meu logar para ir saber o que era.

O singular viajante levantou-se tambem; e, tirando da carteira um bilhete de visita, entregou-m'o, dizendo em bom portuguez:

«Peço desculpa se dei motivo, embora involuntario, a qualquer semsaboria; mas, cessando a causa, cessa o effeito. Eu apeio-me n'esta estação».

E, descobrindo-se respeitosamente, saiu tão apressado que nem sequer me deu tempo a trocar com elle duas palavras.

Dominado pela maior curiosidade, leio o cartão de visita, e n'elle vejo gravado um nome que não me era estranho: o do celebre professor de chimica em Paris, Roberto Duarte Silva.

Tinha idéa, e não me enganava, conforme depois verifiquei, de que este nosso compatriota era um dos mais illustres ornamentos do professorado francez. Natural da ilha de Santo Antão, archipelago de Cabo Verde, foi em 1863 para França, onde publicou varios livros, alguns dos quaes a Academia das Sciencias de Paris premiou. Apesar de estrangeiro, obteve em 1867 a alta distinção de ser eleito presidente da Sociedade de Chimica d'aquella capital.

Em 1889, os jornaes de Lisboa annunciavam a sua morte, occorrida em 9 de fevereiro, e descreviam o funeral do illustre sabio, ao qual assistiram as summidades do professorado e da sciencia de Paris.

A triste nova trouxe-me á memoria o episodio de viagem do anno anterior, que deixo aqui relatado com a mesma simplicidade com que então me foi referido pela sympathica menina que lhe dera origem, e é hoje uma senhora casada das mais illustradas da nossa primeira sociedade.

Julho de 1904.

RANGEL DE LIMA.

(*Revista litteraria, scientifica e artistica d'«O Seculo»*, de 8 de agosto de 1904).

Tumulo de ROBERTO DUARTE SILVA
no cemiterio de Mont-parnasse

Paris, 3 de Jun.
6. Ra

Illmo Exmo Snr A. J. c

Meu prezadissimo a

o meu pezar a c
27 do mez passad,
de mais esta comu.
causa d'uma lon.
cias desagradaveis.
de minha vontade
que esta carta.
trabalho relativo
que fazes autoda.
trabalho escolar,
aceitas para si,
lefora e mais fa
os mais, conclua e
Possa eu voltar a
antiga força pa.
mim reconhecimen
tempo — e sobre tudo
toda fraternal.
meus agradecimento
immensa.
Entend, e peço-l
que não pergunt
ma a'cerca da
É certo que ella q.

BIBLIOGRAPHIA

CH. LUCAS DE PESLOÜAN: — *N. H. ABEL. Sa vie et son œuvre.* Paris. Gauthier-Villars, 1906.

Têem sido consagrados diversos escriptos á biographia e á analyse dos trabalhos de ABEL, o glorioso geometra norueguez, que tão rapidamente passou por este mundo, mas que deixou nelle um brilhante rasto luminoso que jámais se apagará. O livro que vem de publicar sobre a sua vida e a sua obra scientifica o sr. LUCAS DE PESLOÜAN distingue-se porém dos trabalhos anteriores sobre o mesmo assumpto: na parte consagrada á sua vida, pela sua bella forma litteraria, que tem os encantos de um romance, quando narra a vida d'este joven pobrissimo e debil, e só rico de talento, que morreu antes de conseguir realisar as suas aspirações de ser professor em uma Universidade e arranjar assim recursos para alimentar a sua infeliz familia e transformar em esposa a noiva que tinha escolhido, e precisamente no momento em que os seus desejos iam ser satisfeitos e em que os seus trabalhos principiavam a ser apreciados pelos maiores geometras do seu tempo; e, na parte consagrada á sua obra, pelo modo como é nelle examinada a evolução das ideias do grande geometra, principalmente a respeito dos assumptos da theoria geral das equações e da theoria das funcções transcendentes, até á publicação das geniaes descobertas que a este respeito fez.

G. T.

ROBERTO BONOLA: *La geometria non-euclidea.* Bologna, 1906.

N'este trabalho interessante expõe o seu sabio auctor de um modo simples, preciso e muito completo as ideias dos diversos

geometras que se teem occupado do postulado de EUCLIDES que serve de base á theoria das parallelas.

Procuraram muitos geometras demonstrar este postulado ou fundar a theoria das parallelas em base mais evidente. O sr. BONOLA no capitulo 1.° do seu livro dá noticia e faz a critica das tentativas que n'este sentido foram feitas primeiramente na antiguidade, as quaes constam do commentario de PROCLO á obra de EUCLIDES, depois entre os arabes e finalmente na Europa nos seculos XVI e XVII. Depois expõe, no capitulo 2.°, as ideias dos precursores da Geometria não euclideana, SACCHERI, LAMBERT e LEGENDRE, Os capitulos 3.° e 4.° são consagrados á exposição e critica dos trabalhos de GAUSS, SCHEWEIKART, TAURINUS, LOBACEFSKY e BOLYAI, que fundaram a constituiram a Geometria não euclideana. Vem depois no capitulo 5.° noticia dos trabalhos que mais concorreram para o desenvolvimento d'esta Geometria, em especial dos trabalhos de RIEMANN, HELMHOLTZ e CAYLEY.

Terminam a obra duas notas interessantes em que se trata das relações entre o postulado de EUCLIDES considerado e os principios fundamentaes de Statica, e em que são expostos de um modo elementar as importantes indagações de CLIFFORD sobre a theoria das parallelas.

G. T.

ANTONIO AURELIO DA COSTA FERREIRA: *Craneos portuguêses. III. Capacidade.* (Separata do *Instituto*). Coimbra, Imprensa da Universidade, 1906.

Neste volume reuniu o sr. COSTA FERREIRA a serie de artigos que nos ultimos annos tem publicado no *Instituto*, ácerca da capacidade craneana. Com este trabalho, que vem juntar-se aos que anteriormente escreveu sobre o *Pterion* e *Suturas*, completa o auctor, ao menos por agora, os seus estudos de craneometria portuguêsa.

Dotado de excellentes qualidades de observador e d'uma grande vontade de ser util, o sr. COSTA FERREIRA tem conquistado entre nós o apreço de todos os que se interessam pelos estudos da anthropometria e, em particular, do problema ethnico

da nossa população. Se é certo que as conclusões que nos apresenta são por vezes pouco fundamentadas, attento o pequeno numero de casos observados de que são deduzidas, não é menos verdade que os trabalhos do sr. COSTA FERREIRA são d'aquelles que ficam, e que ninguem poderá deixar de ter em conta na elaboração de quaesquer estudos posteriores sobre o assumpto.

D'entre os capitulos do volume a que nos estamos referindo, destacaremos pelo seu interesse os que se referem á variação da capacidade craneana com a estatura e com o indice cephalico, e ás variações sexuaes e ethnicas da capacidade, alguns dos quaes, como outros que por brevidade não citamos, foram apresentados á *Sociedade de Anthropologia de Paris*, em cujos *Boletins* e *Memorias* foram resumidos e discutidos.

Que a nova orientação de estudos do sr. COSTA FERREIRA o não afaste inteiramente dos seus predilectos trabalhos de anthropometria, é o voto que sinceramente formulamos.

S. P.

CARLOS E. PORTER: *Breves instrucciones para la recoleccion de objectos de Historia Natural.* Valparaiso, Imp. Gillet, 2.ª ed. 1903.

Este pequeno manual, publicado com o intuito de tornar conhecidos dos officiaes de marinha do Chili processos praticos para a colheita de exemplares de Historia Natural, é de grande utilidade para todas as pessoas que queiram dedicar-se á organisação de collecções, ou prestar o seu concurso aos estabelecimentos scientificos onde seja cultivada a Historia Natural.

Necessariamente semelhante aos trabalhos do mesmo genero publicados nos outros paizes, o opusculo a que nos estamos referindo tem todavia bastante originalidade pela abundancia de informações relativas a especies chilenas e pelas observações pessoaes do seu auctor, o illustrado director do *Museo de Historia Natural de Valparaiso* e da *Revista Chilena de Historia Natural.*

Começando pelas instrucções relativas á colheita de exemplares de zoologia, que occupam a maior parte do opusculo, dedica ainda o auctor os ultimos capitulos á botanica, mineralogia e geologia.

S. P.

ERRATA

Pagina	Linha	Erro	Emenda
18	2	$\mu(\nu)$	$\Gamma(\nu)$
24	14	$(n + 2s)$	$\binom{n+2s}{s}$
195	13	cathodicos	uranicos
195	25	Pelé e	Pelée

INDEX

ANNAES SCIENTIFICOS

DA

ACADEMIA POLYTECHNICA

DO

PORTO

ANNAES SCIENTIFICOS

DA

ACADEMIA POLYTECHNICA

DO

PORTO

PUBLICADOS SOB A DIRECÇÃO

DE

F. Gomes Teixeira

VOLUME II

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1907

4:632

SUR LES SÉRIES DE FONCTIONS SPHÉRIQUES ET HYPERGÉOMÉTRIQUES

PAR

NIELS NIELSEN

Professeur à l'Université de Copenhague

§ 1. Les deux polynomes $P^{\nu,n}(x)$ et $F(\nu+n, -n, \rho+1, x^2)$

Dans un Mémoire qui vient de paraître dans ces *Annaes* (¹) j'ai étudié la série *neumannienne* obtenue pour la série de puissances

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots, \quad |x| < r,$$

savoir la série

$$(2) \qquad f(\alpha x) = \Gamma(\nu) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (2\nu + 2s)\ A_s^\nu(\alpha) \cdot P^{\nu,s}(x), \quad |\alpha| < r,$$

qui est convergente à l'intérieur de l'ellipse $E\left(\frac{r}{|\alpha|}\right)$ ayant pour

---

(¹) *Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto,* vol. I, n.º 1, p. 17-31, 1905.

équation en coordonnées rectangles

$$(3)\qquad \frac{\xi^2}{\left(\frac{r}{|\alpha|}\right)^2}+\frac{\eta^2}{\left(\frac{r}{|\alpha|}\right)^2-1}=1.$$

Dans le Mémoire que voici nous avons à étudier d'un autre point de vue la série (2).

A cet effet, prenons pour point de départ la formule intégrale très connue [1]

$$(4)\qquad \int_{-1}^{+1} P^{\nu,n}(x)\, P^{\nu,r}(x)\,(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dx=\begin{cases} 0 \\ \dfrac{\pi\Gamma(n+2\nu)}{2^{2\nu-1}(\nu+n)n!(\Gamma(\nu))^2}, \end{cases}$$

selon que $r \gtrless n$ on $r=n$; de plus il faut admettre que la partie réelle de ν est plus grande que $-\frac{1}{2}$. La formule (4) donnera immédiatement pour le coefficient général $A_n^\nu(\alpha)$ de la série *neumannienne* (2) cette expression intégrale

$$(5)\qquad A_n^\nu(\alpha)=\frac{2^{2\nu-2}\,n!\,\Gamma(\nu)}{\pi\Gamma(n+2\nu)}\cdot\int_{-1}^{+1} P^{\nu,n}(x)f(\alpha x)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dx.$$

Considérons ensuite la série *neumannienne* élémentaire [2]

$$(6)\qquad \begin{cases} P^{\rho,n}(\alpha x)=\dfrac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\rho)}\cdot\displaystyle\sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}}(-1)^s(\nu+n-2s)\cdot\frac{\Gamma(\rho+n-s)}{s!\,\Gamma(\nu+n-2s+1)}\cdot\alpha^{n-2s}\,. \\ \quad .\ \alpha^n F(\rho+n+\nu,\ -\nu,\ \nu+n+1,\ \alpha^2).\ P^{\nu,n-2s}(x), \end{cases}$$

---

(1) *Wangerin* dans *l'Encyklopädie*, II, p. 730.
(2) *Annaes*, vol. I, p. 28.

où F désigne la série hypergéométrique ordinaire, la formule (4) donnera, après une légère modification des significations, cette formule intégrale intéressante

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} P^{\rho, n+2r}(\alpha x)\, P^{\nu, n}(x)\,(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dx = \\ &\quad = \frac{(-1)^r \pi\, \Gamma(n+2\nu)\,\Gamma(\rho+r+n)}{2^{2\nu-1}\, n!\, r!\, \Gamma(\rho)\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(\nu+n+1)} \,. \\ &\qquad .\ \alpha^n\, F(\rho+n+r,\ -r,\ \nu+n+1,\ \alpha^2). \end{aligned}\right.$$

Cela posé, mettons dans (2) βx au lieu de x, il résulte

$$f(\alpha\beta x) = \Gamma(\rho) \,.\sum_{s=0}^{s=\infty} (2\rho+2s)\, A_s^\rho(\alpha)\, P^{\rho,s}(\beta x),$$

d'où, en vertu de (5) et (7) ce développement remarquable

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &A_n^\nu(\alpha\beta) = \frac{\beta^n}{\Gamma(\nu+n+1)} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s (\nu+n+2s) . \frac{\Gamma(\rho+n+s)}{s!} \\ &\qquad .\ F(\rho+n+s,\ -s,\ \nu+n+1,\ \beta^2) .\ A_{n+2s}^\rho(\alpha), \end{aligned}\right.$$

convergent pourvu que $|\alpha| < r$ et que β soit situé à l'intérieur de l'ellipse (3).

On voit que la formule (8) exprime une nouvelle propriété intéressante des coefficients d'une série *neumannienne* quelconque; posant particulièrement $\beta = 1$, on retrouve une formule que j'ai développée dans le Mémoire précédent [1].

---

[1] 2), loc. cit., p. 26.

Mettons encore dans (8) $\alpha = 1$, ce qui exige $r > 1$, il résulte un développement de $A_n^\nu(\beta)$ en série de fonctions $F(\rho + n + s, -s, \nu + n + 1)$, série qui est convergente à l'intérieur de ellipse $E(r)$, obtenue en mettant dans (3) $|\alpha| = 1$; c'est-à dire que le champ de convergence de cette série coïncide avec celui que l'on obtient pour la série *neumannienne* qui représente la série de puissances données $f(\beta)$.

Pour étudier maintenant les séries générales de fonctions hypergéométriques $F(\rho + n + s, -s, \nu + n + 2\nu + 1, x^2)$, nous avons tout d'abord à déduire d'autres relations intégrales entre les deux groupes de polynomes entiers $P^{\nu,n}(x)$ et $F(\rho + n, -n, \nu + 1, x^2)$.

A cet effet, appliquons l'intégrale *eulérienne* de première espèce, savoir

$$(9) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^p (\sin\varphi)^q \, d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)},$$

valable pourvu que $R(p) > -1$, $R(q) > -1$, la formule

$$(10) \qquad P^{\nu,n}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s \Gamma(\nu + n - s)}{s!\,(n-2s)!} (2x)^{n-2s}$$

donnera immédiatement cette autre formule intégrale

$$(11) \int_0^{\frac{\pi}{2}} P^{\nu,n}(x\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\rho}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\rho + \frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(\nu)} \cdot F_n^{\nu,\rho}(x),$$

où il faut admettre $R(\rho) > -\frac{1}{2}$, et où nous avons posé pour

abréger

$$(12)\quad F_{2n}^{\nu,\rho}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(\nu+n)}{n!\,\Gamma(\rho+1)} \cdot F(\nu+n,\ -n,\ \rho+1,\ x^2)$$

$$(13)\quad F_{2n+1}^{\nu,\rho}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(\nu+n+1)}{n!\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\rho+\frac{3}{2}\right)} \cdot F\left(\nu+n+1, -n, \frac{3}{2}, \rho+\frac{3}{2}, x^2\right) x;$$

dans (12) F désigne la série hypergéométrique ordinaire, tandis quil faut admettre dans (13)

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x) = 1 + \frac{\alpha . \beta}{\gamma . \delta} . x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\delta(\delta+1)} . x^2 + \dots$$

Inversement, la formule (9) donnera aussi

$$(14)\quad P^{\nu,n}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\rho\right)} . D_x \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_n^{\nu,\rho}(x\cos\omega)(x\sin\omega)\,(\operatorname{tg}\omega)^{2\rho}\, d\omega,$$

où il faut admettre $-\frac{1}{2} < R(\rho) < +\frac{1}{2}$.

Les deux formules (11) et (14) s'accordent bien avec cette identité intégrale

$$(15)\left\{\begin{aligned} &D_x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(xs\cos\omega\cos\varphi)\,(xs\cos\omega)\,(\operatorname{tg}\omega)^{2\nu}(\cos\varphi)^{2\nu}\, d\omega\, d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{2\cos\nu\pi} . f(x), \end{aligned}\right.$$

où il faut admettre généralement $-\frac{1}{2} < R(\nu) < \frac{1}{2}$.

Quant à la formule (15), qui est due au fond à ABEL, on peut consulter deux Mémoires de M. N. DE SONIN à Saint-Pétersb. (1); dans ce qui suit nous avons à appliquer le cas plus particulier de (15) que j'ai déduit dans mon *Traité des fonctions cylindriques* (2).

§ 2. Transformation d'une série générale de fonctions $P^{\nu,n}(x)$

Il est bien connu qu'une fonction $f(x)$, analytique ou non, qui satisfait seulement à certaines conditions est devéloppable en série de fonctions $P^{\nu,n}(x)$ comme suit:

$$f(x) = \Gamma(\nu) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (2\nu + 2s) A_s P^{\nu,s}(x), \tag{16}$$

dont les coefficients se déterminent à l'aide de la formule obtennue de (5) en y mettant $\alpha = 1$.

La théorie rigoureuse des séries (16) qui correspondent à $\nu = \frac{1}{2}$ est due à M. U. DINI à Pise (3), tandis que son élevè M. GIOLOTTO a étudié, en appliquant les principes de son illustre maitre (4), les séries générales (16).

Supposons maintenant que la série

$$f(\alpha x) = \Gamma(\nu) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (2\nu + 2s) A_s^{\nu}(\alpha)\, P^{\nu,s}(x) \tag{17}$$

---

(1) *Mathematische Annalen*, t. 16, p. 48; 1880. *Acta Mathematica*, t. 4, p. 171-175; 1884.

(2) *Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen*, p. 379; 1904.

(3) *Annali di matematica*, 2e série, t. 6; 1874.

(4) *Giornale di matematiche*, t. 39; 1901.

soit convergente, pourvu que x soit situé dans le domaine K (à une ou à deux dimensions) qui contient le point $x=0$, tandis que α soit situé dans le domaine K_1 qui contient le point $\alpha=0$; de plus, supposons que la série soit *uniformement* convergente par rapport à α.

Cela posé, il est évident que cette autre série

$$(18)\quad \begin{cases} f(\alpha x \cos\varphi \sin\omega)(xs\cos\omega) = \Gamma(\nu)\sum_{s=0}^{s=\infty}(2\nu+2s)\,A_s^\nu\,(x\sin\omega)(\alpha s\cos\omega) \\ \qquad\qquad . \; P^{\nu,s}(x\cos\varphi) \end{cases}$$

où ω et φ désignent deux angles réels, est *uniformément* convergente dans les intervalles $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$, $0\leq\omega\leq\frac{\pi}{2}$. Multipliant ensuite par

$$(\operatorname{tg}\omega)^{2\rho}(\cos\varphi)^{2\rho}\,d\omega\,d\varphi, \qquad -\frac{1}{2}<R(\rho)<+\frac{1}{2}$$

les deux membres de (18), un théorème fondamental très connu concernant l'intégration terme à terme d'une série infinie ([1]) donnera, en vertu des formules (11) et (15) et en appliquant la formule *eulérienne*,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+\omega\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\omega\right)=\frac{\cos\pi\omega}{\pi},$$

ce théorème général:

Supposons que la série de fonctions P *qui figure au second membre de (17) satisfasse aux conditions susdites, nous aurosn pour* $f(\alpha x)$ *cet autre développement*

$$(19)\qquad f(\alpha x)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\rho\right)}\,.\sum_{s=0}^{s=\infty}(2s+2\nu)\,B_s^{\nu,\rho}(\alpha)\,F_s^{\nu,\rho}(x)$$

([1]) U. Dini, *Grundlagen*, pp. 523, 528.

qui est convergent où l'est la série (17), tandis que nous avons posé pour abréger

$$(20) \qquad B_n^{\nu,\rho}(\alpha) = D_\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} A_n^\nu(\nu\, s \operatorname{cis} \omega)\,(\alpha\, s \operatorname{cis} \omega)\,(\operatorname{tg} \omega)^{2\rho} d\omega,$$

de sorte qu'il faut admettre généralement $-1 < R(\rho) < \frac{1}{2}$.

Inversement, prenons pour point de départ la série (19), le même procédé nous conduira au développement (17).

Considérons maintenant plus amplement le cas particulier, où $f(x)$ est holomorphe aux environs du point $x = 0$, de sort que la série de puissances correspondante

$$(21) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

a son rayon de convergence égal à r, la série (17) deviendra une série *neumannienne*, dont les coefficients se déterminent comme suit

$$(22) \qquad A_n^\nu(\alpha) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(n+2s)!\, a_{n+2s} \,.\, \alpha^{n+2s}}{s!\, \Gamma(\nu+n+s+1) \,.\, 2^{n+2s}}.$$

Cela posé, la formule (20) donnera, en vertu d'identité

$$\sqrt{\pi}\, \Gamma(2\omega) = \Gamma(\omega) + \Gamma\left(\omega + \frac{1}{2}\right) 2^{2\omega-1},$$

pour $B_n^{\nu,\rho}(\alpha)$ l'expression

$$(23) \qquad B_n^{\nu,\rho}(\alpha) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \rho\right)}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + s + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} + s + \rho\right)}{s!\, \Gamma(\nu+n+s+1)} . a_{n+2s} . \alpha^{n+2s},$$

ce qui donnera le théorème plus particulier:

La série de puissances (21) est développable en série de fonctions

$F_n^{\nu,\rho}(x)$ *comme suit:*

$$(24)\qquad f(\alpha x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (2s+2\nu)\, B_s^{\nu,\rho}(\alpha)\, F_s^{\nu,\rho}(x),$$

série qui est convergente à l'intérieur de l'éllipse $E\left(\frac{r}{|\alpha|}\right)$, *tandis que le coefficient général se détermine à l'aide de la formule*

$$(25)\quad B_n^{\nu,\rho}(\alpha) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+s+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+s+\rho+1\right)}{s!\,\Gamma(\nu+n+s+1)} \cdot a_{n+2s} \cdot \alpha^{n+2s}$$

quant aux paramètres ν *et* ρ, *il faut admettre* $R(\nu) > -1$, $R(\rho) > -1$.

On voit, en effet, sans peine que le second membre de (24) est une fonction analytique et par rapport à ν et par rapport à ρ, si les deux conditions susdites sont remplies.

La série (24) se présente sous forme plus élégante dans les deux cas particuliers où $f(x)$ est supposée *paire* ou *impaire;* dans le § 3 nous avons à étudier le premier de ces deux cas particuliers.

§ 3. Les séries de polynomes $F(\nu+n, -n, \rho+1, x)$.

Supposons que la fonction $f(x)$ qui figure au premier membre de (24) soit une fonction *paire*, nous aurons $B_{2n+1}=0$. Introduisons ensuite dans la série ainsi obtenue, en vertu de (12), au lieu de F_{2n} la fonction hypergéométrique correspondante, puis mettons $x^2=y$, la série de puissances $f(y)$ aura évidemment le rayon de convergence $r_1=r^2$, de sorte que l'équation de l'ellipse $E(r)$

se présente sous cette forme

$$\frac{\xi^2}{r_1} - \frac{\eta^2}{r_1 - 1} = 1.$$

Mettons ensuite $x = \xi + i\eta$ et $y = \xi_1 + i\eta_1$, nous aurons

$$\xi^2 - \eta^2 = \xi_1, \qquad 2\xi\eta = \eta_1,$$

ou ce qui revient au même,

$$\xi^2 = \frac{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} + \xi_1}{2}, \qquad \eta^2 = \frac{\sqrt{\xi_1^2 - \eta_1^2} - \xi_1}{2};$$

c'est-à-dire que la variable y doit être située à l'intérieur de l'ellipse $E_1(r_1)$, dont voici l'équation en coordonnées rectangles:

$$(26) \qquad \frac{\left(\xi_1 - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(r_1 - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{\eta_1^2}{r_1(r_1 - r_1)} = 1.$$

ce qui montre que l'ellipse susdite a le centre $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et ses deux foyers situés dans les points $(0,0)$ et $(1,0)$.

Cela posé, nous allons démontrer cet autre théorème:

La série de puissances (21) est développable en série de fonctions hypérgéométriques comme suit

$$(27) \qquad f(\alpha x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s (\nu + 2s) B_s^{\nu,\rho}(\alpha) F(\nu + s_1 - s_1 \rho + 1, x),$$

série qui est convergente à l'intérieur de l'ellipse $E_1\left(\frac{r}{|\alpha|}\right)$ *et dont*

le coefficient général se détermine à l'aide de la formule

$$(28)\quad B_n^{\nu,\rho}(\alpha)=\frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\rho+1)}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\binom{n+s}{s}\cdot\frac{\Gamma(\rho+n+s+1)}{\Gamma(\nu+2n+s+1}\cdot a_{n+s}\cdot\alpha^{n+s}.$$

Supposons par exemple que $f(x)$ soit une seule puissance de x, il résulte de (28) cette formule particulière

$$(29)\left\{\begin{aligned}x^n=&\frac{(-1)^n\Gamma(\rho+n+1)}{\Gamma(\rho+1)}\cdot\sum_{s=0}^{s=n}(-1)^n\binom{n}{s}\frac{(\nu+n-2s)\Gamma(\nu+n-s)}{\Gamma(\nu+2n-s+1)}\\&\cdot F(\nu+n-s,\ -n+s,\ \rho+1,\ x).\end{aligned}\right.$$

Considérons comme second exemple cette formule plus générale

$$(30)\left\{\begin{aligned}F(\alpha,\beta,\gamma,xy)=&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\binom{-\beta}{s}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\delta+s)}{\Gamma(\delta+2s)}\cdot y^s F(\alpha+s,\beta+s,\delta+2s+1,y)\\&\cdot F(\delta+s,\ -s,\ \gamma,\ x),\end{aligned}\right.$$

d'où il résulte pour $\beta=-n$, n désignant un positif entier, un développement de ce genre

$$(31)\left\{\begin{aligned}F(\nu+n,-n,\rho+1,xy)=&\sum_{s=0}^{s=n}\binom{n}{s}\cdot\frac{\Gamma(\rho+2n-s)\Gamma(\nu+n-s}{\Gamma(\rho+n)\Gamma(\nu+2n-2s)}\cdot y^{n+s}.\\&\cdot F(\rho+2n-s,\ -s,\ \nu+2n-2s+1).\ F(\nu+n)-s,\ \rho+1,\ x).\end{aligned}\right.$$

Mettons encore dans (30) $\beta=\gamma$, il résulte cette formule par-

particulière

$$(32)\begin{cases} \dfrac{1}{(y-x)^{\alpha}} = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{-\beta}{s} \cdot \dfrac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(\gamma+2s)} \cdot x^{s} . F(\alpha+s, \beta+s, \gamma+2s+1, x) \\ \qquad\qquad . y^{-\alpha} . F\left(\gamma+s, -s, \beta, \dfrac{1}{y}\right). \end{cases}$$

Posons ensuite dans (32) $\alpha = 1$, l'intégrale fondamentale de Cauchy donnera, pour une série de puissances, un développement en série de fonctions

$$x^{n} . F(n+1, \beta+n, \gamma+2n+1, x),$$

séries que nous avons à généraliser beaucoup.

§ 4. Les séries de fonctions $x^{n} . F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+2n+1, x)$.

Pour généraliser les séries de fonctions hypergéométriques que nous venons d'indiquer, prenons pour point de départ ce développement particulier

$$(33)\begin{cases} \Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)x^{n} = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^{s} . \dfrac{\Gamma(\alpha+n+s)\Gamma(\beta+n+s)\Gamma(\gamma+2n+s)}{s!\,\Gamma(\gamma+2n+2s)} . x^{n+s} . \\ \qquad\qquad . F(\alpha+n+s, \beta+n+s, \gamma+2n+2s+1, x) \end{cases}$$

déduit directement de (31) en y égalant les coefficients de la même puissance de la variable y, et convergent pourvu que $|x| < 1$.

Or, appliquant cette propriété fondamentale de la fonction $\Gamma(\omega)$:

$$\lim_{p=\infty} \frac{\Gamma(\omega+p)}{(p-1)!\,p^{\omega}} = 1,$$

on voit que la série infinie qui figure au second membre de (33) est convergente comme une série de puissances à l'intérieur du cercle $|x|=1$.

Cela posé, considérons la série de puissances

$$(34) \qquad f(x)=a_0+a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+\dots \qquad |x|<r,$$

puis développons, à l'aide de (33) toutes les puissances de (34), nous aurons une série à double entrée

$$(35) \qquad \Delta=h_0+h_1+h_2+h_3+\dots,$$

dont les séries horizontales h_n sont formées des développements tirés de (33) et ordonnées de sorte que les termes qui contiennent la même fonction hypergéométrique forment les séries verticales de Δ; c'est-à-dire que les séries verticales v_n de Δ seprésentent sous cette forme

$$v_n=x^n.F(\alpha+n,\beta+n,\gamma+2n+1,x).\frac{(-1)^n\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+2n)}\sum_{s=0}^{s=0}\frac{(-1)^s\Gamma(\gamma+n+s)}{(n-s)!\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)}.a^{n-s},$$

ce qui montrera que la série v_n est convergente comme une série de puissances, pourvu que nous ayons à la fois $|x|<1$ et $|x|<r$.

Or, ces remarques faites, nous aurons aussi

$$(36) \qquad \Delta=v_0+v_1+v_2+v_3+\dots,$$

de sorte que nous venons de démontrer ce théorème général:

La série de puissances (34) est développable en série de fonctions hypergéométriques comme suit:

$$(37) \quad f(yx)=\sum_{s=0}^{s=\infty} A_s(y).x^s.F(\alpha+s,\beta+s,\gamma+2s+1,x),$$

où nous avons posé pour abréger

$$(38)\quad A^n(y) = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{L(\gamma+2n)} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s \Gamma(\gamma+n+s)}{(n-s)!\,\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)} \cdot a_{n-s} \cdot y^{n-s};$$

la série (37) est convergente pourvu que nous ayons à la fois $|xy| < r$ *et* $|x| < 1$. *Quant aux paramètres* α, β *et* γ, *il faut supposer seulement que* γ *ne soit pas égal à un entier négatif.*

On voit que la condition $|x| < 1$ s'accorde bien avec le fait que la fonction hypergéométrique a pour $x = 1$ un point critique.

Posons dans (37) $x:(\alpha\beta)$ au lieu de x et $\alpha\beta\gamma$ au lieu de y, puis faisons croître au delà de toute limite les deux paramètres positifs α et β, une formule de P. A. Hansen (1) nous conduira *formellement* aux séries *neumanniennes* de première espèce selon les fonctions cylindriques (2).

Copenhague, le 8 septembre 1905.

---

(1) *Voir mon Handbuch*, p. 10.
(2) Loc. cit., p. 272.

TEMPERATURA E ENTROPIA

POR

ALMEIDA LIMA

Professor na Escola Polytechnica de Lisboa

---

§ 1.º

Algumas considerações sobre o methodo, em Physica

Quem, ao fazer o estudo da Physica, pretenda formar uma ideia das grandezas que são o seu objecto encontra-se frequentemente em graves embaraços, mesmo quando a sua attenção se prenda sobre grandezas do mais correntio emprego.

Já no primeiro e, por assim dizer, preambular capitulo das sciencias physicas — a Mechanica — as difficuldades a que alludimos são graves, e bem se frisam no celebre obice da *acção a distancia*, tão discutido a proposito da lei da gravitação de NEWTON.

E, coisa notavel, é no *calor* onde se deparam as, talvez, mais obscuras noções, embora derivem do estudo d'esse agente os principaes progressos das sciencias physicas, especialmente sob o ponto de vista do methodo.

Multiplas são as causas a que se deve attribuir a *incoherencia philosophica* que se nota nas sciencias physicas d'onde, essencialmente, proveem os defeitos a que temos alludido.

Entre ellas pode apontar-se a desconnexão no estudo dos diversos agentes physicos, outr'ora justificavel, mas hoje em con-

tradicção com o principio da unidade das energias, que deveria reflectir-se na unidade do methodo do seu estudo.

Além d'esta causa principal, desejamos n'este momento chamar a attenção sobre uma outra, que tem adquirido modernamente uma certa importancia: é o abuso da applicação dos methodos da analyse mathematica ao estudo da Physica, procurando-se, assim, tornar este quanto possivel deductivo.

Não pretendemos alongar nos na critica da abusiva applicação do methodo mathematico ás sciencias experimentaes; apenas resumidamente observaremos que d'ella, principalmente, pode resultar:

1.° Uma falsa indicação sobre a marcha do espirito humano na descoberta da verdade [1];

2.° A obliteração da realidade physica, objectivo das sciencias experimentaes.

Não se julgue, porém, que de taes considerações queiramos concluir a inconveniencia da applicação da mathematica ás sciencias experimentaes; simplesmente o que criticamos é a frequente inversão de papeis do *instrumento* e da *obra*, do *meio* e do *fim*.

Tambem cremos que ninguem contestará a inconveniencia de considerar como grandezas physicas, determinadas convenções mathematicas, substituindo a ficção á realidade.

Julgamos, pois, necessario que, no estudo das sciencias experimentaes, aos methodos pseudo-deductivos se substituam, quanto possivel, os de generalisação, tão fecundos, tão despidos de artificios que em outros occultam deficiencias que conviria evidenciar; em sciencia, pelo menos, mais vale a certeza d'um defeito que a illusão de um acerto.

Para demonstrar a fecundidade dos methodos de generalisação basta citar: a sua brilhante applicação, por Helmholtz, ao principio da equivalencia, d'onde resultou o principio da conservação da energia; os trabalhos d'Huygens e mesmo de Fresnel sobre a refracção dupla; as d'Ohm sobre a propagação da electricidade, etc.

De resto, o methodo de generalisação impõe-se no estudo das

---

[1] Citaremos como exemplo muito notavel *d'inversão*, a comprovada modificação introduzida por Fresnel no desenvolvimento da sua immortal theoria da refracção dupla, criticada por Mascart. São tambem interessantes as reflexões de Poisson a tal respeito, etc.

sciencias experimentaes e de observação, cujas leis apenas representam a generalisação dos resultados obtidos em um numero limitado de determinações directas.

As breves considerações que acabamos de fazer são, segundo cremos, sufficientes para justificar o emprego que fizemos do methodo de generalisação n'ete estudo, que tem por especial objectivo esclarecer a significação das noções de entropia e temperatura thermodynamica.

§ 2.º

Do principio de Carnot

Como é sabido Carnot propoz-se a determinar o principio ou lei reguladora da transformação do calor em trabalho, independentemente de quaesquer complicações resultantes dos defeitos do machinismo de transformação, e da variação d'estado do respectivo agente. Considerou, por isso, um motor *ideal* reversivel e percorrendo cyclos fechados.

Da supposta reversibilidade do motor resultava a sua perfeição ideal (ausencia de perdas pelo attrito, conductibilidade, irradiação, etc.); de serem fechados os cyclos descriptos pelo agente resultava a sua invariabilidade *periodica*.

Dadas estas condições theoricas que, como dissemos, tinham por objectivo elliminar complicações accessorias, Carnot concluiu que:

O rendimento da transformação do calor em trabalho apenas depende das temperaturas dos logares de partida (caldeira) *e de chegada do calor* (refrigerante).

Para simplificar quanto possivel as condições do problema, Carnot suppoz tambem que o cyclo percorrido pelo agente de transformação (uma dada massa d'agua, ou d'alcool, d'ar, etc.) poderia ser figurado por duas linhas isothermicas e duas linhas adiabaticas, por forma que o agente apenas recebesse ou cedesse calor, durante as duas transformações isothermicas do cyclo.

Admittindo isto, e, aproveitando o principio da equivalencia para simplificar a expressão analytica do principio de Carnot [1],

---

[1] A independencia entre os dois principios é evidenciada pelo facto de Carnot ter enunciado o seu principio antes de ter conhecimento do principio da equivalencia.

pode dar-se a este a fórma

$$\frac{Q}{Q'} = f(T, T') \tag{1}$$

onde Q e Q′ representam a quantidade de calor recebido (da caldeira) e cedida (ao refrigerante) e T e T′ as temperaturas das transformações isothermicas em que se deram aquellas transferencias.

Subordinando-se apenas $f(T, T')$ á condição imposta pelo principio de Carnot de ser uma *funcção exclusiva* das temperaturas, é claro que ha um numero indefinido de expressões analyticas possiveis do principio de Carnot. Para harmonizar, quanto possivel, a expressão nnmerica da temperatura que deriva d'aquelle principio (ou thermodynamica) com a que deriva da definição de temperatura fundada na dilatação dos gazes, admittiu-se que:

$$f(T, T') = \frac{T}{T'} \tag{2}$$

d'onde resulta a expressão

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{T}{T'} \tag{3}$$

ou

$$\frac{Q}{T} - \frac{Q'}{T'} = 0, \tag{4}$$

ou ainda, notando que nas condições de funccionamento do motor Q e Q′ se devem suppor de signaes contrarios

$$\frac{Q}{T} + \frac{Q'}{T'} = 0 \tag{5}$$

considerando as variações de quantidade de calor do systema, como grandezas algebricas.

*

Feita esta resumida exposição do principio de CARNOT, de um modo adequado ao fim que nos propomos, procuremos desde já fixar ideas sobre o valor *positivo* d'aquelle principio e da noção de temperatura que d'elle se deriva.

Indaguemos, em primeiro logar, se o principio de CARNOT deve ser, como se tem pretendido, considerado como uma lei physica; isto é, como a formulação de factos observados.

Ora, julgamos inadmissivel tal pretenção porque no tempo de CARNOT a temperatura era alguma coisa de empyrico e arbitrario, dependente da escolha da substancia thermometrica. É certo que, muito mais tarde, graças especialmente aos trabalhos de DULONG, PETIT e REGNAULT se *convencionou* considerar sempre como substancia thermometrica um gaz, que obedeça ás leis MARIOTTE e GAY-LUSSAC, e póde admittir-se que o principio de CARNOT tenha sido submettido a uma verificação experimental.

Mas ainda assim, deve notar-se que a temperatura a que se refere o principio de CARNOT apenas coincide approximadamente com a fornecida pelos thermometros de gaz, em quanto este obedece ás leis geraes, e portanto anteriormente aos limites em que se dá tal circunstancia, toda a verificação experimental se torna impossivel. Portanto de duas uma: ou a relação (3) representa uma simples *convenção* sobre a temperatura comparavel com outras que tem sido feitas, ou a lei que representa deriva de uma generalisação.

Notaremos, por ultimo, que um cyclo *reversivel* é *irrealisavel*, e tanto basta para que se evidenceie a impossibilidade de submetter o principio de CARNOT ao criterio da experiencia.

§ 3.º

Generalisação do principio de CARNOT

Consideremos um systema qualquer descrevendo um cyclo fechado e reversivel de transformações simples [1]. Em geral

---

[1] Quer dizer, onde apenas entram em acção modos mechanicos e thermicos de inergia.

essas transformações não serão, como no cyclo de CARNOT, isotermicas, mas, suppondo o cyclo dividido em transformações elementares, em cada uma d'ellas poder-se-ha considerar a temperatura constante. E, admittindo que a equação (5), verdadeira quando apenas se dão duas transferencias de calor, se verifica para um numero qualquer de transformações reversiveis e isothermicas, pademos generalisar aquella equação escrevendo-a sob a fórma:

$$\int \frac{dQ}{T} = 0 \qquad (6)$$

conhecida sob o nome de *primeira egualdade de Clausius.*

Admittamos agora que o systema ainda descreve um cyclo fechado mas realisavel, ou parte realisavel e parte reversivel; notando que o rendimento de transformação deve n'este caso ser inferior ao que corresponde á reversibilidade, concluir-se-hia [1] que em vez da egualdade (6) se deveria escrevar a desigualdade

$$\int \frac{dQ}{T} < 0 \qquad (7)$$

ou, *primeira desigualdade de Clausius.*

Consideremos, ainda, o caso de um systema descrevendo um cyclo *aberto* de transformações *reversiveis* que o conduzam d'um estado A a outro B. Designando por S uma funcção *exclusivamente* dependente do valor das variaveis que definem o estado do systema (ou das suas coordenadas genesalisadas), funcção denominada *entropia,* deduz-se a equação:

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} = S_A - S_B \qquad (8)$$

denominada *segunda egualdade de Clausius.*

---

[1] Pode ver-se a exposição detalhada do methodo de generalisação, que resumidamente estamos expondo, na *Revista d'Artilharia,* n.º 1 e seguintes.

Enfim, o caso mais geral possivel é aquelle em que o systema descreve um cyclo aberto e realisavel de transformações; combinando a desigualdade (7) com a egualdade (8) facilmente se deduz a *segunda desigualdade de Clausius*

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} < S_A - S_B \tag{9}$$

que pode converter-se na egualdade

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} = S_A - S_B - P \tag{10}$$

onde P (denominado *calor não compensado*) tem um valor *essencialmente positivo.*

Para nos não alongarmos sobre um assumpto que não constitue o objecto d'este estudo, não discutiremos as egualdades (8) e (10) que encerram toda a doutrina da entropia applicada ás transformações thermodynamicas simples [1].

§ 4.º

Sobre a significação physica da entropia e da temperatura thermodynamica

Consideremos um motor thermico funccionando segundo um cyclo CARNOT, mas attendamos apenas á serie de transformações que se produzem em quanto o calor se desloca entre a caldeira e o refrigerante.

N'essas condições o cyclo é aberto e reversivel; portanto em virtude da segunda egualdade de CLAUSIUS (8), devemos escrever

$$\frac{Q}{T_1} - \frac{Q'}{T_2} = S_1 - S_2 \tag{11}$$

[1] Essa discussão, bem como a generalisação do principio da entropia a todos os modos d'energia, encontra-se na *Revista d'Artilharia*, nos numeros já citados.

Attendendo a que $\frac{Q}{T_1}$ e S_1 só dependem do estado inicial do systema, bem como $\frac{Q'}{T_2}$ e S_2 apenas dependem do seu estado final, da egualdade (11), verdadeira para qualquer valor das variaveis, resulta que:

$$\frac{Q}{T_1} = S_1 \quad e \quad \frac{Q'}{T_2} = S_2. \tag{12}$$

Generalisando tem-se, no caso de um cyclo aberto e reversivel

$$\Sigma \frac{Q}{T_1} = S_1 \quad e \quad \Sigma \frac{Q'}{T_2} = S_2. \tag{13}$$

Comparemos as expressões (11), (12) e (13) com as analogas que correspondem ao potencial newtoniano.

Adoptando as notações correntes tem-se

$$\frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2} = V_1 - V_2 \tag{11'}$$

$$\frac{m}{r_2} = V_2 \quad e \quad \frac{m}{r_1} = V_1 \tag{12'}$$

e

$$\Sigma \frac{m}{r_2} = V_2 \quad e \quad \Sigma \frac{m}{r'} = V_1. \tag{13'}$$

A analogia de *fórma* é evidentemente completa entre os dois grupos de expressões; e, portanto, acceitando-o como criterio, deveriamos concluir que a entropia funcciona como um *potencial thermico* e a temperatura como *uma distancia*, ou ainda, como um *nivel* no caso especial da gravidade.

Comtudo não é necessaria uma analyse muito demorada para reconhecer que a analogia entre as expressões relativas ao calor e electridade é apenas apparente; basta, com effeito, notar: 1.° que as expressões (11'), (12') e (13') são relativas a um

modo *potencial* de energia, emquanto que as (11), (12) e (13) são relativas a um modo *actual;* 2.º que as massas *m* das expressões relativas á electricidade são *centraes* e, portanto, constantes e immoveis, emquanto que as quantidades de calor Q são moveis e variaveis.

Quer, pois, dizer que para estabelecer analogias entre a temperatura e a entropia, e as grandezas consideradas em electricidade, se torna necessario recorrer a expressões referidas a modos actuaes de energia, tanto no que respeita ao calor como á electricidade.

Considerando o caso de um motor trabalhando segundo um cyclo Carnot tem-se, em virtude da egualdade (3) que:

$$\frac{Q-Q'}{Q}=\frac{T-T'}{T}$$

ou

$$Q-Q'=\frac{Q}{T}(T-T')$$

ou, notando que $\frac{Q}{T}$ se refere ao systema quando parte da caldeira, tem-se designado por S a entropia *de partida* do systema:

$$Q-Q'=S(T-T').$$

Ora, $Q-Q'$ representa a parte da energia calorifica que se transforma em trabalho; designando esta por W, tem-se, pois, com approximação d'uma constante

$$W=S(T-T') \tag{14}$$

Confrontemos esta expressão com a que relaciona o trabalho (ou energia equivalente) desenvolvido pelo deslocamento de uma carga electrica M, entre dois logares de potenciaes V e V'; tem-se com approximação d'uma constante

$$W=M(V-V') \tag{14}$$

D'esse confronto resulta, evidentemente, que as grandezas

homotheticas (se a expressão é licita) nos dois modos de energia são: por um lado a temperatura e o potencial, por outro a entropia e a carga electrica.

Um ponto ainda resta a discutir, e actualmente de bastante interesse, porquanto, segundo recentes e arrojadas theorias, se tem posto em duvida o principio da *invariabilidade da massa.*

Não nos alongaremos n'essa analyse, porque já excedemos os limites que tencionavamos dar ao presente estudo; limitar-nos-hemos a comparar a massa electrica e a entropia, com a massa determinada pela acção da gravidade, a que daremos o nome de *gravitica.*

Ora, a expressão do trabalho desenvolvido por uma massa gravitica m quando se desloca entre dois logares de niveis Z e Z' é

$$W = mg(Z - Z'). \qquad (14'')$$

Comparando [1] as tres equações (14), (14') e (14'') verifica-se que são grandesas homotheticas nos tres modos de energia *gravitica electrica* e *calorifica,* por um lado, a temperatura, o potencial e o nivel, por outro as massas magnetica e electrica e a *força gravitica* ou *peso.*

O facto de não serem homotheticas as tres massas resulta do diverso criterio que presidiu á sua determinação; quer, pois, dizer que o valor numerico da massa é alguma coisa de arbitrario e dependente do criterio a que se subordinar a sua avaliação.

Esta circumstancia creio que não tem sido convenientemente considerada nas theorias a que alludimos, e d'ahi tem resultado confusões que o tempo, segundo cremos, se encarregará de esclarecer.

Accrescentaremos ainda que não pensamos que a noção de *massa,* considerada como *substractum* da materia, ou como *supporte do movimento,* tenha um valor perfeitamente arbitrario; o que não sabemos dizer, n'este momento, é qual criterio se deve

---

[1] Não deve esquecer, quando se pretenda ajuizar sobre a verdadeira significação e *génesis* do principio de CARNOT, que a sua deducção foi feita comparando o trabalho desenvolvido pela queda d'uma massa d'agua entre dois niveis, com o desenvolvido pela *queda do calor* entre duas temperaturas.

preferir para determinar o seu valor numerico de modo que se adapte o melhor possivel áquella noção; julgamos comtudo que a definição de massa, que melhor pode coordenar as doutrinas dos diversos capitulos das sciencias physico-chimicas, deve derivar da noção de energia, cuja unidade é uma da mais perfeita syntheses que se tem conquistado.

Tambem pensamos que a *inercia*, unica propriedade que realmente caracterisa a *massa* (ou materia despojada de *todos* os seus movimentos) se deve referir á *energia* e não á *força*.

LES ESPICHELLITES, UNE NOUVELLE FAMILLE DE ROCHES DE FILONS, AU CAP ESPICHEL

PAR

V. Souza-Brandão

Je dois à l'obligeance de Mr. P. Choffat, le distingué géologue attaché à la *Commission du Service Géologique du Royaume*, d'avoir pu étudier ces quelques roches, dont les échantillons ont été recueillis aux abords du Cap Espichel, au Sud de Lisbonne. Ce sont des filons d'épaisseur variable, qui traversent le jurassique, ou bien, comme la roche de Seixalinho (II), se trouvent interstratrifiés dans les calcaires crétaciques. Mr. Choffat n'a rien remarqué qui puisse faire croire à une action de contact des masses éruptives sur les calcaires traversés.

Mon honoré collègue m'avait prié, il y a deux ans, de lui fournir une détermination de ces échantillons pour un de ses *Mémoires sur le crétacique du Portugal*, paru depuis dans les *Communicações da Commissão do Serviço Geologico de Portugal* (1). L'examen superficiel et provisoire que j'entrepris alors m'a conduit à classifier les trois roches très décomposées, décrites dans la dernière partie de ce travail (IV), parmi les spilites ou diabases compactes; j'y ajoutai cependant un point d'interrogation, que je ne pouvais lever qu'après une étude attentive du sujet. Ce sont les roches de la falaise à l'Ouest de l'église, de Lagosteiros et de Sobre-

---

(1) T. IV, p. 1. *Pour les roches en question voir* p. 17.

ladeiras. L'état de décomposition avancée de ces trois roches ne m'a pas permis d'établir avec sureté leur nature spéciale, mais tout me porte à croire qu'elles se rattachent aux trois autres roches, relativement fraiches, que je décrirai d'abord, de même que certaines roches à aspect de diabases porphyritiques, qui accompagnent ailleurs des monchiquites, ne sont peut-être que des modalités de ces dernières.

La roche de *Praia dos Degraus*, à structure porphyrique, décrite en premier lieu (I, p. 2) m'a semblée voisine des *camptonites;* c'est justement l'étude de cette roche qui m'a conduit à créer une nouvelle famille, les *espichellites*, que je place près des *camptonites*, dans le groupe des lamprophyres.

L'échantillon recueilli à 30 *m* NW de la station sémaphorique (III), que j'étudie ensuite, posséde toute l'apparence des teschenites portugaises et pourrait, même après un examen plus mûr, passer pour une de ces roches sans la présence d'une mésostase amorphe ou qui était telle au commencement, qui s'accorde bien avec le caractère de son gisement fillonien et la rapproche de la roche de *Praia dos Degraus*. Quant à l'échantillon de *Seixalinho*, je n'ai pas pu l'examiner alors en plaques minces, Mr. Choffat m'ayant prié de lui donner mon avis le plus rapidement possible.

I. La roche à structure porphyrique de *Praia dos Degraus*

Cette roche se trouve à l'Ouest de l'église du *Cap Espichel*, dans la grève nommée *Praia dos Degraus*.

C'est une roche caractéristiquement porphyrique, à pâte noire compacte. Les phénocristaux appartiennent à l'hornblende, à l'augite et à l'olivine, quoique chez ces derniers la substance primitive ait été remplacée entièrement par de la calcite et plus ou moins de serpentine. À côté de ceux-ci, on observe aussi des phénocristaux de magnétite et de pyrite en petit nombre. Les cristaux des bisilicates, hornblende et augite, se réunissent souvent en groupes de plusieurs individus, accolés les uns aux autres avec exclusion complète de la pâte de l'intérieur des groupes.

Le poids spécifique de cette roche, déterminé par suspension

dans la liqueur de THOULET à l'aide d'indicateurs, est d'environ 2,93 (2,92 à 2,94).

Les pseudo-olivines. Moins fréquentes que les phénocristaux d'hornblende et d'augite, ces pseudo-olivines donnent au premier abord, dans les plaques minces, l'impression d'amandes de calcite entourée et sillonnée de serpentine, surtout lorsque les premières que l'on aperçoit ont des contours fortement arrondis. Mais, dans les fragments de la roche, on aura bientôt fait de remarquer ces petits cristaux à facettes mattes et à arêtes plus ou moins émoussées, d'un gris jaunâtre sale qui les fait ressembler à de la cire pétrie longtemps entre les doigts. Comme ils se détachent assez facilement de la pâte, ils pointent toujours là où la surface de fracture du fragment en rencontre par hasard quelques-uns.

Ces cristaux (c'est entendu qu'il s'agit de pseudomorphoses) dépassent rarement 3 *mm* de plus grande dimension, mais ils atteinent fréquemment 1,5 et 2 *mm*. Il y en a de prismatiques, c'est-à-dire à dimensions transversales à peu près égales, et d'autres applatis plus ou moins fortement suivant une paire de faces parallèles. Malgré l'imperfection des facettes et l'absence presque complète de pouvoir réfléchissant chez la plupart d'eux, je suis parvenu cependant à mesurer un de ces cristaux, un peu moins imparfait, à l'aide de la disposition microgoniométrique ([1]) que j'ai décrite dans un travail antérieur.

J'ai mesuré les deux zones principales du cristal, perpendiculaires l'une à l'autre. L'une de ces zones, dont les faces étaient un peu plus réfléchissantes, a été mesurée entièrement à l'aide de l'image de la mire; elle était constituée par 8 faces, dont deux, des plans de symétrie, etaient la face d'aplatissement et la face normale à celle-ci dans la zone en question. La face d'aplatissement formait avec les deux faces adjacentes d'un prisme symétrique des angles de 40,5° en moyenne. Dans l'autre zone, dont les faces présentaient une forte courbure et étaient beaucoup moins réfléchissantes que celles de la première, il a fallu se contenter de l'éclairement maximum de chaque face, observée

([1]) *Communicações da Commissão do Serviço Geologico de Portugal*, t. V, p. 228 seq. V. aussi *Zeitsch. für Krystallographie* etc. de GROTH, 39, p. 583 seq., 1904.

orthoscopiquement faute d'une image de la mire. Cette zone est également symétrique par rapport à deux plans perpendiculaires, dont la face d'aplatissement, et elle est constituée par 12 faces, qui sont, outre les quatre faces parallèles aux plans de symétrie, celles de deux prismes symétriques, qui forment avec le plan d'aplatissement des angles variant respectivement de 64,5° à 69,5° et de 39,5° à 46°.

C'est donc bien de l'olivine qu'il s'agit. Le plan d'aplatissement est T (010), l'autre plan de symétrie de la première zone mesurée est la base P (001) et le prisme de cette zone est *k* (021), dont l'angle avec T devrait être de 40°26′ (mesuré : 40,5°). Les plans de symétrie de l'autre zone sont T (010), encore, et M (100), et les prismes *n* (110), avec l'angle (*n*T) = 65°2′, et peut-être *s* (120), défini par l'angle (*s*T) = 47°2, à moins que ce ne soit *r* (130), avec (*r*T) = 35°35′; ils y sont peut-être tous les deux, raccordés par la courbure de leur arête commune.

Le cristal en question est aplati parallèlement à T (010) et un peu allongé dans le sens de l'axe longitudinal *a;* il a la base et le pinacoïde transversal (100) très étroits. En outre des formes déterminées par les mesures goniométriques, on s'aperçoit facilement de la présence d'une forme de la zone transversale [010], qui n'est autre que *d* (101), et de deux faces situées entre *d* et chacune des faces T, sans doute des faces de *e* (111). J'ai encore observé, à deux reprises, dans les plaques minces de la roche, des sections à contours rectilignes assez nets dont un côté très allongé, sans doute la trace de T (010), faisait avec le côté adjacent un angle s'écartant peu de 74°, qui est à peu près l'angle de *w* (012) avec T (010). Dans l'un de ces deux cas, j'ai même reconnu, aux autres droites du contour, que la section n'était pas loin d'être normale à l'axe *a* [100]. La présence de la forme *w* (012) est donc très probable.

La figure 1 donne une idée du type des cristaux aplatis, avec les formes dont la présence me semble assurée.

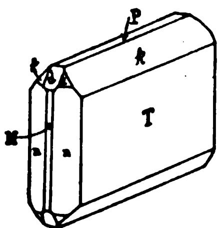


Fig. 1

La substance de l'olivine se trouve entièrement remplacée par de la calcite, entourée d'une couche mince de serpentine, qui s'épaissit par endroits et envoie de ci de là des apophyses dans la masse de la calcite. Dans celle-ci se trouvent englobés de petits cristaux de ma-

gnétite, et dans la serpentine on remarque des aiguilles opaques, réunies parfois en groupes étoilés, que je tiens pour du rutile provenant de l'acide titanique de l'olivine disparue.

Le carbonate rhomboédrique est bien de la calcite et non un carbonate riche en magnésie, comme on serait en droit d'attendre; je m'en suis assuré par les réactions ordinaires. D'un autre côté les deux réactions de *Meigen*, toutes deux d'un effet très sûr, comme j'ai tenu à constater sur des échantillons *d'aragonite*, en même temps que la figure d'interférence bien caractérisée de la calcite en lumière convergente, ne m'ont laissé le moindre doute sur la nature calcitique du minéral qui remplace l'olivine, quoique ces masses possèdent une structure franchement bacillaire ou fibreuse.

La serpentine est fibreuse avec allongement positif de la fibre.

L'olivine est, après le fer oxydulé et sulfuré, le minéral le plus ancien parmi ceux des phénocristaux; on la rencontre englobée dans l'hornblende, et elle est idiomorphe au contact de celle-ci, qu'elle envahit de ses arêtes et sommets.

L'hornblende. Les phénocristaux d'hornblende sont des prismes presque toujours très allongés suivant l'axe vertical *c* [001]. Leur longueur atteint fréquemment 1 centimètre, tandis que l'épaisseur reste en général au-dessous de 2 millimètres. Ils se détachent beaucoup plus difficilement de la pâte que les cristaux d'augite et les pseudo-olivines; en général on n'en obtient que des fragments, à cause du clivage prismatique parfait par lequel ils se divisent, en laissant en place la partie périphérique.

Ils sont d'un noir de jais et possèdent un éclat remarquable sur les plans de clivage. Leur poudre est grise verdâtre, et leur densité, déterminée dans la liqueur de Thoulet à l'aide d'indicateurs, est d'environ 3,15.

J'ai mesuré au microgoniomètre (1) 18 prismes, dont 3 seulement étaient constituées par des faces naturelles, tandis que deux autres étaient des moulages en creux dans la pâte, laissés par des cristaux détachés; des 13 restants, 12 présentaient exclusivement des plans de clivage dans la zone des prismes et le dernier portait en même temps des faces naturelles et des plans

(1) L. c.

de clivage. Les mesures m'ont permis de constater immédiatement la présence de la forme *a* (100), à faces très étroites, et celle d'un clivage suivant *b* (010), dont les faces naturelles sont d'ailleurs très developpées et souvent plus larges que celles de *m* (110). Le clivage suivant (010) est assez facile pour permettre d'ajuster ses plans au moyen de l'image de la mire.

Un fait remarquable résulte de ces observations, et c'est que l'angle du prisme de cette hornblende, qu'il s'agissait de déterminer, diffère suivant qu'il est mesuré sur les prismes de clivage ou sur les prismes à faces naturelles et sur les moulages en creux. Les 12 prismes de clivage ont fourni, comme moyenne des angles mesurés sur chacun d'eux, les valeurs suivantes :

55°43′	55°30′	55°40′	55°41′
» 53	» 52	» 38	» 37,5
» 46	» 58	» 48	» 34,5,

dont la moyenne est

55°43′.

D'un autre côte les prismes naturels et les moulages ont fourni les valeurs individuelles

56°11′, 56°7′, 56°, 56°1′, 56°16′,

avec une moyenne de

56,7′,

assez différente de la précédente. Cet accord entre les prismes à faces naturelles et les moulages, en même temps que la différence des angles mesurés à l'aide de ceux-ci et des prismes de clivage, semble démontrer que les cristaux d'hornblende en question ont une couche extérieure, une enveloppe très mince, dont la substance possède un angle du prisme différent de celui qui caractérise la substance du noyau (nous verrons en effet qu'il s'agit de deux substances différentes, lorsque nous décrirons les propriétés optiques du minéral). L'enveloppe se rapprocherait

donc, par son angle du prisme, de l'arfvedsonite (56°5′), tandis que l'angle du noyau est celui de l'hornblende commune.

Les cristaux d'hornblende sont délimités, dans la zone des prismes, par les formes *m* (110), *b* (010) et *a* (100), cette dernière à faces toujours très étroites mais assez parfaites ; on l'observe, d'ailleurs, fréquemment dans les sections des plaques minces, qui se rapprochent de la perpendicularité à la zone. Aux extrémités de l'axe vertical se trouvent *c* (001) et $r(\bar{1}11)$ [1] comme habituellement, mais la base accuse en général une conformation très défectueuse, sa trace, dans les plaques minces, se présentant sous l'aspect d'une suite de créneaux irréguliers à contours cristallographiques vagues. Il n'a pas été possible de déceler de clivage ou division parallèle à la base ou à $(\bar{1}01)$, comme on a observé dans plusieurs hornblendes.

Des cristaux maclés suivant (100) sont très fréquents, presque la règle. Quelquefois ce sont deux seuls individus de même grandeur juxtaposés, d'autres fois c'est une lamelle très mince, délimitée par deux plans très parfaits, parallèles à (100), qui se trouve intercalée dans un individu. Seule la lumière polarisée permet de reconnaître ces macles. Il arrive aussi que, au lieu d'une seule lamelle, il s'en trouve un petit nombre de très minces alternant avec des lamelles de l'individu principal dans la partie moyenne de celui-ci.

Cette hornblende est zonée. La plupart des cristaux ne présentent qu'une substance brune entourée d'une couche mince périphérique d'un brun rougeâtre. Cependant, on en observe fréquemment qui portent au centre un noyau d'un brun verdâtre, très absorbant pour les ondes vibrant parallèlement à β et γ [2], et d'autres encore, plus rares, présentent une quatrième cou-

---

(1) Nous suivons ici la symbolique de *Nordenskiöld* et *Descloizeaux*, dans laquelle $\beta = 75°2'$, et non celle de *Tschermak*, adoptée par *H. Rosenbusch* dans sa *Physiographie*, où la forme (001) est devenue (101) et réciproquement, et par conséquent $\beta = 73°58'$.

(2) Pour éviter l'emploi de caractères allemands, aussi bien que celui des symboles moins simples n_g, n_m, n_p en usage chez les petrographes français, nous désignerons les indices de réfraction, en même temps que les directions des vibrations des ondes corrélatives, par les caractères grecs α, β, γ, qui représentent, par conséquent, en grandeur ($\alpha < \beta < \gamma$) et direction les demi-axes de l'ellipsoïde des indices.

che comprise entre l'enveloppe et la partie principale brune, ou formant plusieurs couches très minces au milieu de celle-ci; elle est d'un brun un peu plus foncé que la couche dominante. Ces différentes zones se délimitent mutuellement par des surfaces cristallographiques à arêtes plus ou moins arrondies. Parfois, le caractère cristallographique de ces surfaces disparaît à cause de l'envahissement des faces par la courbure des arêtes, mais on n'observe jamais de surfaces déchiquetées, qui seraient le résultat d'une forte corrosion magmatique, comme il arrive chez l'augite; les premières couches, surtout le noyau verdâtre, ont dû posséder au moment de leur formation une certaine viscosité, qui les a empeché de développer des faces et arêtes cristallographiques parfaites, mais il n'y a pas eu de dissolution partielle par le magma, comme pour cette dernière.

Le fait le plus remarquable de cette zonation consiste dans la présence invariable de la couche extérieure, qui, en section, prend l'aspect d'un filet généralement très mince, d'un brun rougeâtre (dans les ondes β et γ), et dont la délimitation envers le noyau, toujours nettement cristallographique, est constituée par les mêmes formes qu'elle présente à l'extérieur, comme revêtement définitif des phénocristaux, mais avec des arêtes arrondies. En conséquence de sa couleur et de cette délimitation si régulière envers le noyau, aussi bien que par la différence des angles du prisme, dont il a été question plus haut, l'hornblende de l'enveloppe semble être nettement distincte, par sa composition, de celle des couches intérieures, comme, par exemple, la couche de feldspath alcalin, qui enveloppe parfois des feldspaths calco-sodiques, l'est de ceux-ci. Peut-être même, la différence consiste-t-elle, comme pour le feldspath, dans un enrichissement en alcali, vu que l'angle du prisme de l'enveloppe est celui de l'arfvedsonite.

L'obliquité d'extinction sur (010), rapportée à la vibration positive et à l'axe vertical c 001], c'est-à-dire l'angle ($c\gamma$), a été mesurée à plusieurs reprises à l'aide de sections qui, par leur pléochroïsme spécial, leur haute biréfringence, la direction unique des traits de clivage et le contour cristallographique, mais surtout en raison de la figure d'interférence caractéristique en lumière convergente, ne laissaient aucun doute sur leur parallélisme au plan des axes optiques (010). Nous avons toujours trouvé, pour cet angle, des valeurs très peu différentes entre elles et

de 11°, γ se trouvant en arrière de c, c'est-à-dire dans l'angle aigu ($(ca) = 75°2'$) des axes cristallographiques du plan de symétrie. Ceci pour la substance de la couche dominante à laquelle se rapportent toutes les données qui suivent; la couche mince périphérique a une obliquité ($c\gamma$) de 8° seulement, dans le même sens que celle du noyau.

La biréfringence maxima, déterminée sur ces sections à l'aide du compensateur de Babinet, varie entre 0,020 et 0,023. Cette dernière valeur a été obtenue en mesurant directement l'épaisseur de la lamelle d'hornblende, fixée sur le porte-cristal de l'appareil goniométrique (grand modèle) de Klein, au moyen d'une oculaire micrométrique, tandis que, pour l'obtention des autres valeurs, l'épaisseur a été déterminée au travers de grains de feldspath voisins, dont l'orientation optique et les indices de réfraction n'étaient connus qu'approximativement. Il est donc préférable de retenir

$$\gamma - \alpha = 0{,}023.$$

Sur une section presque exactement normale à α, la biréfringence était

$$\gamma - \beta = 0{,}004.$$

Les positions des axes optiques ont été déterminées à plusieurs reprises au moyen de sections et de procédés variés, que nous allons décrire.

Dans l'une des préparations se trouvait un section d'hornblende de dimensions relativement grandes, ayant un contour très parfaitement rectiligne, déterminé par les deux faces de $b(010)$, les quatre faces de $r(\bar{1}11)$ et une face de (001); la fig. 2 en reproduit les lignes essentielles. La petite obliquité d'extinction (3°50'), de sens rétrograde à partir de la trace de (010) et rapportée à la vibration positive, démontre que la section ne s'écarte pas beaucoup d'un plan de la zone de symétrie [010], et la direction sensiblement uniforme des traits de clivage prouve en même

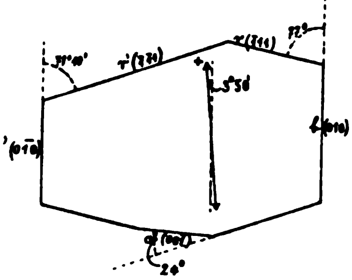


Fig. 2

temps que la section est très proche d'un plan de la zone verticale [001]. Étant données les faces qui concourent dans cette hornblende, les droites qui forment le contour de notre section ne peuvent être attribuées qu'aux formes indiquées. Il ne peut non plus être douteux, à cause du sens rotatif de l'angle d'extinction, que la section ne soit un plan de la moitié gauche du cristal, c'est-à-dire que ce ne soit son angle (angle externe ou angle des normales) avec $(0\bar{1}0)$ qui est aigu, ou, ce qui revient au même, que son symbole (en indices irrationnels naturellement) ne soit de la forme (hkl), dès le moment que la direction de γ reste daus l'angle aigu (ca).

Les côtés du contour polygonal de la section étant nettement droits, à l'exception toutefois du petit côté dû à c (001), leurs angles ont pu être mesurés avec une grande précision, soit en faisant tourner la platine du microscope, soit à l'aide d'un oculaire à plateau divisé tournant devant un index.

En désignant chaque trace par la lettre de la face productrice avec l'indice inférieur 1, nous aurons, pour les angles en question:

	$(b_1\, r_1) = 77°\text{-}0'$
et	$(b'_1\, r'_1) = 71\ 10,$
d'où	$(r_1\, r'_1) = 31\ 50,$
et, en outre,	$(r'_1\, c'_1) = 24,$

ce dernier groissièrement approché seulement, en raison de l'imperfection de la trace de (001).

Comme les trois faces $(0\bar{1}0)$, (111), $(\bar{1}\bar{1}1)$ sont en zone, nous pouvons calculer la position cristallographique de la section au moyen d'une simple équation carrée, comme j'ai montré dans un travail publié dans les *Communicações da Commissão do Serviço Geologico de Portugal* [1]. Sans entrer dans les détails du calcul,

---

[1] Sur l'orientation cristallographique des sections des minéraux des roches etc.: *Communicações*, t. IV, p. 79 seq. 1901.

je ferai toutefois remarquer que ce procédé fournit en général deux solutions, qui dans notre cas sont représentées par les deux pôles f et f' inscrits dans la projection stéréographique de la fig. 3. Rapportés à (010) comme pôle, et au cercle de la zone [(010) ($\bar{1}$11)] des faces déterminatives comme méridien origine, les deux pôles f et f', symétriques l'un de l'autre à l'égard du pôle [101] de la susdite zone, sont définis par les distances polaires (v) et les azimuts (s) suivants, ces derniers comptés positifs dans le sens progressif pour un observateur placé au pôle origine (010) :

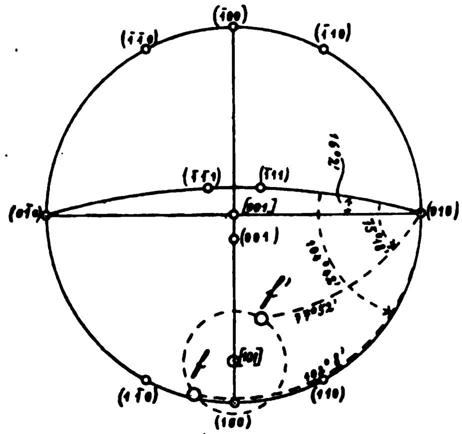


Fig. 3

	v	s
f	102° 8′	104°42′
f'	77 52	75 18.

Pour pouvoir reconnaître entre ces deux pôles celui qui convient à notre cas, il suffit d'avoir à notre disposition la trace d'une quatrième face, qui ne soit pas en zone avec les trois faces déterminatives, quand bien même cette trace ne sera pas exempte de défauts. On calculera l'angle des traces de cette quatrième face et de l'une quelconque des trois premières sur les deux plans trouvés comme solutions. Des deux angles ainsi calculés, l'un seulement se rapprochera suffisament de l'angle observé et indiquera par là la vraie solution. Dans notre cas, le calcul fournit, pour l'angle des traces de la base (001) et de (010) sur f,

93,5°,

tandis que l'angle observé est de 95° environ (71°10′ + 24°

d'après fig. 2). L'accord est donc très remarquable, étant donnée l'imperfection de la trace de (001).

Nous pouvons, en outre, orienter la section dans son plan, c'est-à-dire reconnaître vers quelle extrémité de la trace de (010) se trouve celle des deux faces de la base, qui fait avec notre section (on doit entendre par là le côté supérieur, tourné vers l'objectif du microscope pendant l'observation) un angle (externe) aigu. Si nous regardons la section comme un plan ***antérieur***, dont la normale dirigée vers l'extérieur du cristal avance sur l'observateur, en regard duquel le cristal est censé se trouver dans la position ordinaire, c'est-à-dire avec [001] vertical et (001) s'abaissant vers lui, l'extrémité de la trace de (010) vers laquelle se trouve l'angle aigu de la base avec la section sera l'extrémité supérieure. Or, la bissectrice négative α, qu'on voit émerger dans le champ conoscopique, s'écartant de la normale de la section vers le point de rencontre des deux droites du contour désignées dans la figure 2 par b et r, et la direction γ étant située dans l'angle aigu (ca), ce qui a comme conséquence que α émerge, par devant, audessus de la normale de (100), il est évident que l'extrémité supérieure en question est celle qui dans notre figure (2) se trouve en haut, et que les droites marquées r et r' sont les traces des faces ***supérieures postérieures*** $(\bar{1}11)$ et $(\bar{1}\bar{1}1)$ du prisme oblique r $\{\bar{1}11\}$, qui s'abaissent à mesure qu'elles s'écartent du lecteur; alors les deux autres faces de ce prisme, dont les traces, dans la partie inférieure de la figure, ne sont pas désignées spécialement par des lettres, sont les faces ***inférieures antérieures***.

Si l'on avait regardé la section comme un plan postérieur du cristal, ce qui, étant donné l'axe binaire du système clinorhombique, revient exactement au même, les deux paires de traces de r $\{\bar{1}11\}$ échangeraient simplement leur position à l'égard du lecteur. Il résulte de ces considérations que, dans tous les cas, c'est à l'extrémité de la trace de (010) (les côtés verticaux de la figure) vers laquelle se trouvent les traces marquées r et r' du prisme oblique, que la base fait un angle (externe) aigu avec le plan de notre section.

Il convient maintenant, pour rendre plus aisée l'utilisation des observations polariscopiques au travers de la lamelle que nous venons d'orienter cristallographiquement de toutes pièces,

d'avoir sous les yeux une projection stéréographique sur le plan même de la section, de façon que la figure des pôles du cristal se présente dans la direction même de la normale de la section. Pour cela, nous n'avons qu'à amener le pôle f de celle-ci, par deux rotations convenables, au centre du cercle horizontal (v. fig. 3). Ce sont: 1) une rotation autour du diamètre transversal $[(0\bar{1}0)-(010)]$ de ce cercle, par laquelle f est amené sur le cercle vertical qui se projette suivant le susdit diamètre; 2) une rotation autour du diamètre longitudinal $[(\bar{1}00)-(100)]$, qui, tout en laissant les pôles (010) et $(0\bar{1}0)$ sur le cercle vertical transversal, amène enfin f au centre de la projection. Dans la première de ces deux rotations, chaque point de la sphère, et partant chacun des pôles inscrits, décrit un arc de parallèle autour de (010) comme centre sphérique, dont la grandeur s'obtient de la façon suivante. L'angle des arêtes $[(010)(\bar{1}\bar{1}1)] \equiv [101]$ et $[(010)(1\bar{1}0)] \equiv [001]$ situeés dans (010) étant de 16°2′ (puisque l'angle $(10\bar{1}):(100) = 73°58' = 90 - 16°2'$), l'angle des arêtes [001] et (010) f], qui est celui des méridiens qui se croisent au pôle (010) et passent respectivement par le pôle (110) du prisme et le pôle f de notre section, est de

$$s - 16°2' = 104°42' - 16°2' = 88°40'.$$

C'est justement de cet angle qu'il faut faire d'abord tourner la figures des pôles dans le sens progressif autour du pôle (010) pour amener f sur le cercle vertical transversal. Ensuite, pour l'amener sur le centre de la projection, il suffit de faire tourner la figure des pôles de

$$v - 90° = 102°8' - 90° = 12°8'$$

autour du pôle où se trouvait (100) avant la première rotation, également dans le sens progressif. On parvient ainsi à la position des pôles représentée dans la (fig. 4).

Pour obtenir la position des axes optiques à l'aide de notre section orientée cristallographiquement, nous avons fait usage de deux appareils successivement: la platine Klein (à deux

axes) et l'appareil universel (goniomètre à trois axes) préconisé par le même savant.

Dans le procédé qui utilise la platine, on détermine deux coordonnées de chacun des axes optiques, que l'on centre, soit en lumière parallèle par la persistence de l'extinction lorsqu'on fait tourner simultanément les nicols croisés (pour cela il faut naturellement être pourvu d'un microscope à rotation conjuguée des nicols), soit en lumière convergente, en amenant au centre du réticule le point immobile de l'isogyre, autour duquel tourne cette dernière lorsqu'on fait tourner simultanément les nicols, et qui n'est autre que le pôle de l'axe optique.

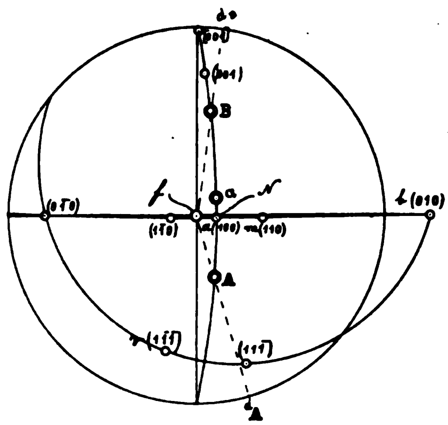


Fig. 4

Le centrage en lumière convergente reste, dans la plupart des cas, le plus précis, car il est en général plus facile de juger de la superposition de deux points, même lorsque l'un d'eux est plus ou moins estompé, que du moment de l'extinction la plus complète d'une section d'un individu cristallin, surtout si celle-ci est inclinée par rapport à la ligne de collimation de l'instrument, l'inclinaison donnant lieu à l'envoi, suivant la susdite ligne, de plus ou moins de lumière réfléchie à la surface de la section. Il n'y a que lorsque la section à l'étude est trop peu étendue pour l'observation conoscopique, étant donnés les moyens encore très imparfaits dont nous disposons pour ce genre d'observations, qu'il faudrait avoir recours à l'observation en lumière parallèle.

Je profite de cette occasion pour ajouter quelques considérations sur certains points de cette méthode.

Pour la mesure des inclinaisons, on doit faire, au cercle vertical de la platine, la lecture relative à la perpendicularité du disque de verre de celle-ci à l'axe du microscope. Cette lecture se fait une fois pour toutes, la position perpendiculaire s'obtenant

à l'aide du dispositif d'autocollimation que j'ai proposé et dont je me sers avec le plus grand succès ([1]).

Le choix du liquide à interposer entre le disque et la préparation, et qui sert à fixer les lentilles demi-sphériques à l'un et à l'autre, n'est pas indifférent. Sans parler de son indice de réfraction, qui doit approcher autant que possible de celui du verre des lentilles, et lui être au moins égal si l'on veut épuiser l'utilité de celles-ci, il faut se garder d'employer des composés du carbone, tels que la naphtaline monobromée et l'iodure de méthylène, avec des plaques décapées, car ces liquides attaquent le baume de Canada et abiment les préparations en peu de temps. La solution concentrée de Thoulet est, par contre, complètement indifférente à l'égard du baume et donne, par conséquent, les meilleurs résultats, son indice de réfraction étant d'ailleurs, à saturation, supérieur à celui de la naphtaline monobromée et à peine inférieur à l'indice de l'iodure de méthylène.

Les observations en lumière polarisée convergente au travers de plaques portées par la platine mobile exigent un condenseur et un objectif spéciaux, possédant à la fois un long foyer et une ouverture numérique assez forte par rapport à sa distance focale, pour permettre, par la distance de leurs fronts au disque de la platine, une certaine inclinaison de celui-ci autour de l'axe horizontal (immobile), tout en admettant un cône suffisament ouvert des faisceaux de lumière destinés à projeter les phénomènes de polarisation. Le condenseur et l'objectif utilisés dans ce travail, fournis par R. Fuess (de Berlin) comme accessoires de l'appareil goniométrique (grand modèle) de Klein, ont tous deux 14 mm de distance focale, et des ouvertures numériques correspondant, dans l'air, respectivement à 60° et 46°, tandis qu'un objectif ordinaire de microscope, de 14 mm, n'a, en moyenne, que 30° d'ouverture dans l'air. C'est justement pourquoi les images orthoscopiques que fournit un microscope armé de cet objectif sont tellement imparfaites, ternes et déformées, qu'il ne peut pas être question de s'en servir à cette fin, malgré l'avantage qui en résulterait.

Cet objectif porte, gravé sur sa face antérieure, un réticule

---

([1]) L. c. p. 3 de ce travail.

à quatre traits, dont deux, à angle droit, se croisent au centre, tandis que les deux autres, à 45° des premiers, se trouvent interrompus à une certaine distance du point central. Il doit servir à centrer l'image conoscopique; mais celle-ci, venant se former dans le plan focal postérieur de l'objectif, il en résulte une parolaxe qui nuit plus ou moins à la précision du centrage. Il est vrai que l'on peut ne pas faire usage du réticule frontal et centrer le pôle de l'axe optique simplement au moyen du réticule de l'oculaire, où il vient se peindre au travers de la lentille de Bertrand, qu'il est indispensable d'intercaler quand on tient à une certaine amplification de la figure d'interférence. Mais alors les traits du front de l'objectif, toujours visibles, produisent une confusion qui empêche tout centrage quelque peu exact sur le réticule de l'oculaire.

C'est pourquoi, à la place de ces traits de front, cet objectif devrait porter un réticule dans son plan focal postérieur. Le centrage se ferait alors au moyen de ce réticule focal, au lieu de se faire sur celui de l'oculaire, désormais inutile, et serait indépendant du centrage plus on moins imparfait de la lentille de Bertrand. Je compte faire construire cet objectif.

Une fois que l'on est parvenu à amener le pinceau noir de l'isogyre dans le champ de vision, il est facile de centrer l'axe optique correspondant. On n'a qu'à faire tourner les nicols (toujours croisés) jusqu'à ce que le pinceau devienne successivement parallèle aux deux fils du réticule, auxquels l'axe horizontal de la platine est lui-même parallèle et perpendiculaire. Lorsque le pinceau est devenu parallèle à cet axe, on l'amène, par une rotation autour de celui-ci, à coïncidence avec le fil qui lui est parallèle; et quand, après avoir fait tourner les nicols encore de 90°, il est devenu perpendiculaire au susdit axe horizontal, on fera tourner le disque de la platine dans son plan jusqu'à ce qu'on obtienne la coïncidence du pinceau avec l'autre fil.

Or si, au commencement de l'opération, lorsque la préparation est normale à l'axe du microscope, on a centré la lentille demi-sphérique supérieure, c'est-à-dire si l'on a amené le point de croisement des deux petits traits très fins gravés sur sa face plane dans l'axe du microscope dans lequel se trouvait d'avance l'endroit de la section qu'on désirait plus particulièrement étudier, l'inclinaison du disque autour de l'axe horizontal de la platine

déplacera forcément le centre de la demi-sphère et l'écartera ainsi de l'axe du microscope. Ce sera surtout le cas, si, comme il arrive généralement, la plaque ou lamelle minérale se trouve fixée sur porte-object, car, l'axe horizontal de la platine étant contenu dans la surface même du disque, la face plane de la lentille, appliquée contre la plaque, s'en trouvera assez éloignée vers le haut. D'un autre côté, la rotation du disque dans son plan produira aussi un déplacement plus au moins sensible du centre de la lentille libre, parce que en général, cette dernière n'est pas, centrée avec le disque, et n'a pas besoin de l'être exactement.

En vue de ce que nous venons de dire et de ce que la méthode suppose que les faisceaux de lumière polarisée qui dépeignent les phénomènes à observer ne subissent point de réfraction au passage de la lentille libre dans l'air, on ne doit regarder le centrage de l'axe optique (ou de toute autre direction à pôle reconnaissable dans un champ telescopique) comme définitif que lorsque le centre de cette lentille se trouvera en même temps dans l'axe du microscope, *parce que les faisceaux qui en émergent dans l'air ne cessent d'être réfractés à sa surface sphérique qu'à la condition que leurs rayons principaux ou moyens aient passé par le centre de la lentille*. Il est, en effet, facile d'observer que le pinceau noir se déplace dans le champ conoscopique lorsqu'on fait subir un petit déplacement à la lentille libre, d'où l'incertitude du centrage de l'axe optique si l'on n'a pas recours à la règle justement ennoncée.

Ce que nous venons de dire a trait à la demi-sphère libre, supérieure ou objective, Quant à l'inférieure, qui agit simplement comme condenseur en projetant sur la section un cône de faisceaux de lumière, elle n'a pas besoin d'être centrée exactement avec l'axe du microscope, mais il faut qu'elle le soit jusqu'à un certain point, afin que la lamelle reçoive le faisceau qui, après avoir émergé de la lentille libre supérieure, suit la direction de la ligne de collimation de l'instrument, aussi bien que les faisceaux voisins tout autour de celui-là. C'est pourquoi, lorsque la platine vient d'être fortement inclinée, il convient de déplacer un peu la lentille libre condenseur, préalablement centrée dans la position horizontale du disque, de façon à amener son centre dans l'axe du microscope, car l'épaisseur du disque et du porte-object l'en écartent considérablement pour les fortes inclinaisons.

La platine Klein nous permet d'obtenir deux coordonnées de l'axe optique à déterminer de l'hornblende. Ce sont: l'azimut par rapport à la trace de (010) sur notre section, et l'inclinaison à l'égard de la normale de la section, le premier par la différence des lectures (sur la division du bord du disque) relatives à la position dans laquelle l'axe optique est centré et à la perpendicularité de la trace de (010) à l'axe horizontal de la platine, et la seconde par la différence des lectures (sur le cercle vertical) relatives au parallélisme successif de l'axe optique et de la normale de la section à la ligne de collimation du microscope. Cette inclinaison nous donnerait immédiatement l'angle du plan de la section avec le plan normal à l'axe optique sans la réfraction au passage du cristal dans la lentille demi-sphérique objective (ou dans l'air, si l'on ne fait pas usage des lentilles libres); mais à cause de cette réfraction, il faut, pour obtenir le sinus de l'inclinaison vraie, diviser le sinus de l'angle observé par le rapport de l'indice moyen du minéral à l'indice du milieu extérieur (verre de la lentille, air), qui n'est autre que l'indice de réfraction moyen du minéral par rapport à ce milieu. Si l'on ne connaît pas exactement cet indice-là, le procédé ne peut donner qu'un résultat approché, quoiqu'en général aussi approché que beaucoup de résultats fournis par d'autres méthodes pétrographiques, et que la variabilité objective des grandeurs à mesurer le permettent. Mais dans les cas en question nous pouvons nous passer de la coordonnée *inclinaison*, comme nous allons voir.

Si nous nommons A celui des deux axes optiques qui présente une dispersion remarquable et B l'axe sans dispersion bien sensible, les coordonnées observées sont:

	A	B
Azimut	— 18°12′	+ 9° 34′
Inclinaison	+ 37 5	— 55 29.

Comme, dans la position de perpendicularité du disque à la ligne de collimation du microscope et de la trace de (010) à l'axe horizontal de la platine, les arêtes notées *r*, *r'* (fig. 2) se trouvaient vers la droite d'un observateur regardant suivant l'axe horizontal, du côté du cercle vertical, l'inclinaison positive, c'est-à-

dire obtenue par une rotation dans le sens progressif, implique l'abaissement des arêtes r, r', tandis qu'une inclinaison négative signifie leur relèvement.

Pour obtenir la position des axes optiques, il suffit maintenant de tracer dans la projection stéréographique (fig. 4) deux rayons fd_A et fd_B, du cercle horizontal, qui fassent des angles de $-18°12'$ et $+9°34'$ avec le diamètre antéro-postérieur. Les points où ces rayon coupent le cercle de la zone (010), qui est en même temps la trace sphérique du plan des bissectrices, sont les pôles des axes optiques. Leurs angles avec la normale de $a(100)$ s'obtiennent en résolvant les triangles sphériques $\}faA\{$ et $\}faB\{$, qui fournissent

$$(aA) = 31°15'$$
$$(aB) = 52\ 35,$$

dont la moyenne, $41°55'$, tendrait à prouver que la bissectrice négative, α, fait avec la normale de (100) un angle de $10°40'$ ($= 41°55 - 31°15'$), qui serait en même temps l'obliquité principale d'extinction de la zone [001]. Nous avons donc, d'après ces observations,

$$(c\gamma) = 10°40'$$
$$V_\alpha = 41\ 55.$$

Si dans les mêmes triangles sphériques on calcule les angles (fA) et (fB), on obtient

$$(fA) = 34°32'$$
$$(fB) = 52\ 16.$$

On peut déduire de ces angles et des angles observés (inclinaisons mesurées, de A et B, à l'égard de la section) l'indice moyen du minéral à l'étude, en tenant compte de l'indice des lentilles libres employées (1,717), par les formules

$$n_1 = 1{,}717\,\frac{\sin 37°\ 5'}{\sin 34°32'}\ ,\qquad n_2 = 1{,}717\,\frac{\sin 55°29'}{\sin 52°16'}\ ,$$

qui donnent

$$n_1 = 1{,}826 \quad , \quad n_2 = 1{,}788.$$

Ce résultat tendrait à prouver que l'indice en question est d'environ **1,81**, assurément trop élevé; en tout cas, c'est cette grandeur qu'il faut employer dans la réduction au cristal des inclinaisons des axes optiques observés au travers des lentilles libres, l'indice de **1,717** de celles-ci, communiqué par le constructeur, n'ayant pas été controlé par une détermination personnelle.

Après avoir fait usage de la platine Klein, je me suis servi de l'appareil universel ou goniométrique (grand modèle), tout en expérimentant avec la même lamelle d'hornblende, qui a été détachée de la plaque mince dont elle faisait partie, et qui, après avoir été appliquée avec un peu de naphtaline monobromée sur un fragment de couvre-objet, fut fixée au porte-cristal de l'appareil. Les opérations préparatoires du procédé consistent:

1) à rendre l'axe immobile de l'appareil parallèle et perpendiculaire aux fils du réticule;

2) à rendre le plan de la lamelle parallèle au plan de l'un des deux segments divisés et partant perpendiculaire à celui de l'autre, en faisant tourner le porte-cristal sur son aiguille à ressort;

3) à rendre la trace de (010) parallèle à l'axe de ce dernier segment, en faisant tourner la lamelle dans le plan du premier, auquel elle vient d'être rendue parallèle;

4) à rendre la section normale à l'axe du microscope par des rotations successives autour de la trace de (010), que l'on vient de rendre parallèle à l'axe de l'un des segments divisés et de l'axe immobile de l'appareil, et à faire la lecture de cette position sur le cercle vertical (immobile).

On passe ensuite de l'observation orthoscopique à l'observation conoscopique en changeant d'objectif, on centre successivement les deux axes optiques, toujours au moyen de rotations autour des deux seuls axes nommés ci-dessus, et on fait la lecture du cercle vertical.

J'ai fait deux séries d'observations, en utilisant les lentilles demi-sphériques libres de **1,717**. Voici la moyenne des lectures, sur le cercle vertical de chaque série, en même temps que la

moyenne totale (III):

	I	II	III
Axe A	36°32′	36°26′	36°29′
Axe B	306 14	306 17	306 15,5
Normale de la lamelle, *f*	1 50	1 53	1 51,5

En combinant les lectures relatives à A et B avec celle de *f* par soustraction, on obtient les distances sphériques des pôles des axes optiques *réfractés* dans le verre des lentilles libres au cercle de la zone [*f*.(010)], définie par le plan de notre section, *f*, et le plan des axes optiques, (010) (v. la projection stéréographique de fig. 4). Ces distances sont donc:

$$d(A - f) = 34°38'$$

et $$d(f + 360° - B) = 55\ 36.$$

Au moyen de ces arcs, on obtient les distances sphériques des pôles des axes vrais (dans le cristal) au susdit cercle de zone en divisant leurs *sinus* par l'indice de réfraction 1,81/1,72 de l'onde β au passage du cristal dans le verre des demi-sphères libres. Le résultat en est

$$(AN) = 32°41'$$

et $$(BN) = 51\ 38,$$

si nous nommons N l'intersection de la trace sphérique du plan des axes vrais avec le cercle de la zone [*f*.(010)]. De là l'angle des axes optiques vrais autour de la bissectrice négative α,

$$(AN) + (BN) = 2V_\alpha = 84°19' = 2(42°9,5'),$$

et la distance sphérique de cette bissectrice au cercle de la

zone $[f.(010)]$

$$V_\alpha - (AN) = (\alpha N) = 42°9{,}5' - 32°41' = 9°28{,}5'.$$

Et, comme l'angle de N avec la normale de (100) est

$$(N:(100)_n) = 1°20',$$

nous obtenons, enfin, pour l'obliquité principale d'extinction de la zone [001] des prismes:

$$((100)_n:\alpha) = (c\gamma) = 9°28{,}5' + 1°20' = 10°48{,}5',$$

c'est-à-dire à très peu près l'angle obtenu avec la platine Klein (10°40′).

Enfin, j'ai procédé à une troisième détermination, encore à l'aide de cette platine, mais avec une section d'orientation cristallographique inconnue, qui s'est trouvée se rapprocher beaucoup du plan de symétrie optique normal à la bissectrice α, et qui offre, dans son contour, une trace de (010) — le plan des axes — assez longue et parfaitement rectiligne. Voici les moyennes des lectures faites, aussi bien dans le cercle azimutal (I) que dans le cercle des inclinaisons (II):

	I	II	III	IV
Axe A	268°37′	343°48,5′	+ 11°32′	— 46°41,5°
Axe B	245 54	75 59	— 11 11	+ 45 29
Trace de (010), *b*	257 5			
Normale de la section, *f*		30 30		

Les colonnes III et IV donnent respectivement les ***azimuts*** des axes optiques à l'égard de la trace de leur plan (010) et leurs ***inclinaisons réfractées*** dans le verre de la demi-sphère à indice 1,717. Les premiers sont les différences $A - b$ et $B - b$ des lectures inscrites dans la colonne I, les dernières, celles $A - f$

et $B - f$ des lectures inscrites dans la colonne II. Une projection stéréographique — ayant comme plan horizontal le plan de la section et comme diamètre antéro-postérieur la trace du plan des bissectrices (010) — montrerait les deux pôles des axes optiques réfractés (que nous désignons par A' et B' pour les distinguer des vrais A et B) à gauche de ce diamètre, A' au-dessus et B' au-dessous du diamètre transversal. Il est inutile d'en donner la représentation graphique.

Comme la section n'est pas orientée cristallographiquement et que nous ne connaissons pas, comme dans la première détermination, la position du plan des axes, nous devons maintenant faire usage des inclinaisons mesurées et les réduire à leurs valeurs vraies, en divisant leurs sinus par le quotient de réfraction de l'onde β du cristal, à son passage dans la lentille libre. Cela nous donnerait, avec les azimuts, les positions des axes vrais, et on obtiendrait ensuite leur angle $2V_\alpha = (AB)$ au moyen du triangle sphérique $\{AfB\}$. Mais, dès que les axes sont à très peu près également inclinés sur la section qui est, par conséquent, un plan de la zone de la bissectrice γ, (puisque nous savons déjà que l'angle des axes est aigu autour de α), il nous suffit de calculer immédiatement l'angle des axes réfractés, par la formule:

$$\cos(A'B') = \cos(A'f)\cos(B'f) + \sin(A'f)\sin(B'f)\cos\{A'fB'\},$$

où

$$(A'f) = 46°41', \qquad (B'f) = 45°29'$$
$$\{A'fB'\} = 180° - (11°32' + 11°11') = 180° - 22°43',$$

ce qui nous donne

$$(A'B') = 89°52' = 2\,(44°56').$$

En divisant le sinus de la moitié de cet angle par le quotient de réfraction 1,81/1,72, on obtient:

$$\sin V_\alpha = \sin {}^1\!/_2\,(AB) = \frac{1,72}{1,81} \sin {}^1\!/_2\,(A'B') = \sin 42°9,5'.$$

Nous avons donc pour le demi-angle aigu des axes optiques les trois valeurs

$$41^\circ 55' \ (\text{p. } 19)$$
$$42 \quad 9{,}5 \ (\text{p. } 21)$$
$$42 \quad 9{,}5 \ (\text{p. } 23),$$

dont la moyenne est

$$V_\alpha = 42^\circ 5' ;$$

et pour l'obliquité principale d'extinction de la zone des prismes [001] :

$$10^\circ 40'$$
$$10 \ 48{,}5',$$

avec la moyenne

$$(c\gamma) = 10\,^3/_4{}^\circ.$$

Ces résultats se trouvent réunis dans la fig. 5, construite, je le répète, sur la base des axes de Nordenskiöld, adoptés plus tard par Descloizeaux et pour lesquels γ demeure dans l'angle aigu *(ca)* des axes cristallographiques.

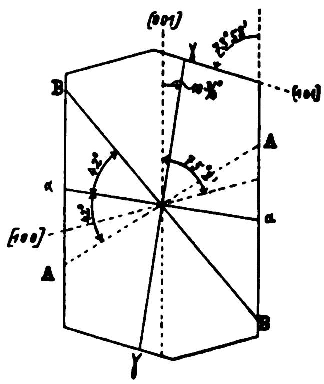


Fig. 5

La dispersion des bissectrices est bien sensible dans les sections voisines de leur plan. Lorsqu'on fait tourner une de ces sections dans le sens progressif, à partir de la position d'extinction maxima entre les nicols croisés, on voit apparaître une teinte vert jaunâtre, tandis qu'une rotation de sens rétrograde amène une teinte bleuâtre, qui passe graduellement au vert jaunâtre précédent.

Des deux axes optiques A et B, le premier présente une forte dispersion avec $\rho < \upsilon$ autour de α, mais B, au contraire, n'en montre pas sensiblement. De là $(c\gamma_\rho) < (c\gamma_\upsilon)$.

Le pléochroïsme est très intense, comme d'habitude:

β et γ (également) *brun foncé*

α *jaune brunâtre très clair*,

$$\beta = \gamma >> \alpha,$$

ce qui veut dire que les ondes qui vibrent parallèlement à β et γ sont très fortement absorbées, tandis que l'onde à vibration α l'est, au contraire, très faiblement.

Ceci s'applique particulièrement à la substance dominante. La couche mince enveloppante s'en distingue à peine dans l'onde α, tandis que, pour les deux autres ondes, elle est plus ou moins rougeâtre et plus foncée. D'un autre côté, le noyau qui se présente parfois à l'intérieur de la substance principale est gris verdâtre, clair dans l'onde α, mais presque opaque, au contraire, en conséquence d'une forte absorption, et tout en conservant un ton verdâtre, dans les ondes β et γ. Ce noyau gris verdâtre de l'hornblende est le pendant du noyau vert d'herbe de l'augite de cette roche.

Un phénomène très intéressant, que présente cette hornblende, c'est le dichroïsme des sections normales aux axes optiques. Dans ces sections, facilement reconnaissables à leur extinction indifférente entre les nicols croisés, j'ai toujours observé que l'onde qui vibre parallèlement à β montre la teinte foncée propre de cette vibration, tandis que l'onde qui vibre dans le plan des bissectrices se rapproche, par sa couleur, de l'onde α, quoiqu'ayant une absorption sensiblement plus forte. Ce fait est d'autant plus remarquable que, l'angle des axes optiques étant aigu autour de α, il semblerait plus naturel que l'onde vibrant dans le plan des bissectrices se rapprochât davantage, par sa couleur, de l'onde γ que de l'onde α; il est de nature à démontrer que l'ellipsoïde de polarisation, qui définit les phénomènes de biréfringence, est loin d'être identique à l'ellipsoïde d'absorption, en vertu de quoi il se propage, suivant chacun des axes optiques, deux ondes qui, malgré leur vitesse identique, diffèrent l'une de l'autre par l'absorption élective. On sait, d'ailleurs, que l'explication de cet ensemble de phénomènes par la superposition de deux ellipsoïdes représentatifs de deux lois différentes, n'est applicable qu'aux milieux dont l'absorption est loin derrière celle des métaux.

La couche extérieure présente la même particularité, avec des teintes respectivement plus foncées et plus ou moins rougeâtres.

L'hornblende de cette roche est donc une *hornblende basaltique* bien caractérisée; il ne peut être question de la *barkevikite*, car justement du côté de l'obliquité principale d'extinction de la zone des prismes, qui est de 14° pour la *barkevikite*, notre hornblende révèle bien sa nature purement basaltique, avec $(c\gamma) = 10\,^3/_4{}^\circ$. Du reste, je pense depuis longtemps, et j'ai eu l'occasion d'en parler dans une lettre à un de mes confrères d'Allemagne, que la barkevikite ne peut pas être séparée de l'hornblende basaltique; j ai le plaisir de trouver cette opinion confirmée par H. Rosenbusch, dans l'édition récente de son remarquable traité (1).

Notre hornblende s'associe souvent avec l'augite, en général par simple contact latéral, et elle se montre idiomorphe à l'égard de cette dernière. Une fois, cependant, j'ai remarqué un prisme allongé d'augite, enveloppé par un cristal maclé assez court d'hornblende et dépassant celui-ci de beaucoup à l'une des extrémités.

L'association est fréquemment régulière, les faces (010) et les zones [001] des deux minéraux étant respectivement parallèles, mais elle est plus souvent indépendante de toute orientation.

L'hornblende héberge de nombreux cristaux de magnétite, souvent de dimensions considérables. On y remarque aussi une poussière noire, qui se concentre dans le centre des cristaux les plus développés, et y forme des taches plus ou moins opaques à contours irréguliers, que l'on prendrait au premier abord, et surtout lorsque la poussière est très fine, pour de l'hornblende d'une constitution particulière. Cependant, lorsque les grains de la poussière sont un peu moins fins, on les reconnaît individuellement, et ils donnent l'impression de grains de magnétite.

La plupart des phénocristaux d'hornblende enveloppent des plages hétérogènes soit de pâte, soit de calcite. Ces plages présentent tantôt le contour cristallographique de l'hornblende même, parfois très net pour les faces de la zone [001], tantôt ce sont des formes tout-à-fait irregulières, et elles émettent des apophyses plus ou moins longues dans la masse de l'hornblende. J'ai eu aussi l'occasion d'observer, dans plusieurs sections, de petites inclusions de calcite disposées autour d'un noyau en série linéaire

(1) *Mikroskopische Physiographie der Mineralien und Gesteine.* I (2), 1905, p. 236.

parallèle à une partie du contour de ce dernier, et allongées dans le sens de l'axe *c* de l'hornblende. Dans quelques cas, il se peut que les plages de calcite soient le résultat de la transformation d'inclusions primaires d'olivine; mais les inclusions de calcite à contour cristallographique emprunté au minéral hébergeant sont assurément le produit de la transformation d'inclusions primaires de pâte, que l'on observe aussi encore fréquemment plus ou moins intactes, et toujours avec une délimitation cristallographique empruntée à l'hornblende. Ces plages, celles de pâte aussi bien que celles de calcite, sont parfois très grandes (et longues dans les cristaux allongés) et hébergent de petits cristaux de magnétite.

La cristallisation de l'hornblende et de l'augite ont eu lieu, au moins pour une certaine période de temps, côte à côte, comme le prouvent les inclusions réciproques de l'un de ces minéraux dans l'autre; mais l'idiomorphisme presque constant de l'hornblende à l'égard de l'augite dans leurs associations semble démontrer que la cristallisation de la première a commencé et s'est terminée bien avant celle de la seconde.

L'augite. Les phénocristaux d'augite, qui atteignent fréquemment 5 ou 6 *mm* de plus grande dimension, mais restent en moyenne au-dessous de 2 *mm*, présentent l'aspect bien connu de l'augite basaltique, déterminé par les formes *m* (110), *a* (100), *b* (010), *s* ($\bar{1}11$), avec prédominance tantôt de *m* (110), tantôt de *a* (100) et plus rarement de *b* (010). Ils sont du type prismatique court, souvent même à peu près isométriques en conséquence d'un fort développement des faces de *s* ($\bar{1}11$), qui en arrivent à dépasser en étendue les faces de la zone [001]. Les cristaux maclés suivant *a* (100) ne sont pas tout-à-fait rares.

Ces phénocristaux sont noirs, sans le moindre éclat sur les faces naturelles, et donnent une poudre gris verdâtre. Le clivage prismatique est très imparfait; par contre, on observe un clivage assez distinct, parallèle à *b* (010), qui produit des surfaces brillantes à reflets huileux, verdâtres. Dans les sections des plaques minces, le double clivage prismatique se révèle par des traits peu prolongés quoique en quantité, tandis que le clivage pinacoïdal est marqué par un petit nombre de traits assez longs et rectilignes.

Parfois, ces cristaux ne sont pas complets; il leur manque des parties plus ou moins grandes, comme s'ils avaient éclaté pendant leur formation au sein de la pâte liquide. Ce qui prouve que

c'est, en effet, le cas, c'est que ces fragments présentent aussi sur les surfaces irrégulières de fracture la bordure plus foncée, riche en microlites, que l'on observe sur les faces cristallines, et qui montre bien que ces cristaux ont continué à croître après avoir éclaté.

Leur poids spécifique, déterminé à l'aide de la balance de Westphal, par la méthode hydrostatique, est de 3,302, moyenne des trois valeurs 3,304, 3,297, 3,305 obtenues successivement et à la température de 20° à 21° C. Le minéral fond facilement sur les bords au chalumeau, et l'acide chlorhydrique ne l'attaque pas sensiblement. Pour contrôler les résultats de l'étude optique, qui ne s'accordent pas avec la présence d'une proportion remarquable d'acide titanique dans cette augite, j'ai procédé à l'essai qualitatif, par fusion du minéral réduit en poudre, avec du bisulfate de potasse et traitement du produit de fusion par l'eau oxygénée. Je n'ai obtenu qu'une vague coloration en jaune, qui démontre l'absence d'acide titanique, au moins dans les proportions qui caractérisent l'augite titanique (*Titanaugit* des pétrographes allemands). Je passe maintenant aux résultats de l'examen microscopique.

Les cristaux d'augite sont composés de couches successives à colorations diverses. Lorsqu'ils sont assez grands, les couches internes sont vertes; mais chez les plus petits, ces couches vertes manquent tout à fait pour ne laisser de place qu'à une substance jaune rosée très claire, enveloppée d'une couche mince plus foncée, dont il sera question plus loin.

Dans la fig. 6, j'ai représenté, aussi fidèlement que possible, une section d'un cristal zoné, que j'ai observée. Elle est très peu inclinée sur *a* (100), comme le démontrent les deux angles de son contour, inscrits dans la figure, (qui pour *a* (100) devraient être, tous les deux, de 59,5°), aussi bien que la petite obliquité d'extinction par rapport aux côtés les plus longs du contour, traces des deux faces de *b* (010). Voici les caractères les plus saillants des six zones ou couches du cristal.

Fig. 6

1. C'est le noyau, à contour irrégulier, en zig-zag, mais net, avec quelques segments de lignes droites, traces de plans cristallogra-

phiques. Il est vert jaunâtre (jaune serin), et son contour déchiqueté est, à n'en pas douter, le résultat de la corrosion exercée par le magma sur un individu primitivement plus grand et délimité par des faces cristallines. La petite surface à droite, en bas, de même nature que le noyau, n'en semble probablement détachée, que parce que la masse qui l'y rattachait a été enlevée par la taille de la plaque.

2. Cette zone est de couleur vert d'herbe et possède en grande partie des contours cristallographiques. Elle se laisse envahir et dépasser, par endroits, par le noyau corrodé.

3. Couche grise, vaguement verdâtre, à contours irréguliers, arrondis dans les sommets (traces des arêtes), ayant cependant un aspect général cristallographique.

4. Substance d'un gris beaucoup plus clair que la zone précédente, et encore vaguement verdâtre. Contour parfaitement cristallographique dans la partie supérieure de la figure. C'est la dernière zone de couleur verdâtre.

5. Couche jaune rosé très clair, à contour cristallographique parfait. C'est la substance de cette couche qui constitue, à elle seule, le noyau des cristaux plus petits, enveloppée alors par la seule couche périphérique suivante (bordure).

6. Cette couche enveloppe offre une couleur analogue à celle de 5, quoique moins claire, et elle se termine dans la périphérie du cristal par un petit filet riche en microlites. Son contour, qui est en même temps celui du cristal, est le plus parfaitement cristallographique de tous.

Les obliquités d'extinction, rapportées à la trace de (010) et à la vibration la plus voisine de cette trace, sont, pour les couches successives, indiquées à gauche :

(1)	5°	(4)	10°
(2)	2	(5)	16
(3)	5	(6)	12,

comptées dans le sens progressif à partir de la trace de (010)

(côtés verticaux du contour). Le retour de couches avec des angles d'extinction pareils ou plus rapprochés étant accompagné d'une dissemblance marquée de ces couches, quant à la couleur, n'est probablement pas ici le fait d'une récurrence, mais bien plus vraisemblablement le résultat d'une compensation plus ou moins parfaite, due à la variation simultanée des proportions de plusieurs des oxydes qui entrent dans la composition de notre augite.

Dans une autre section — celle-là perpendiculaire au plan des bissectrices et, par conséquent, à extinction simultanée de toutes les couches, que l'on distinguait, cependant, les unes des autres dans la position diagonale (d'éclairement maximum) — j'ai remarqué que la zone (3) est rongée et envahie par la zone suivante. C'est donc, comme le noyau (1), une substance que le magma a fortement attaquée, tandis que les autres couches ont été plus stables en face du magma résiduel, après leur formation respective; le noyau a été, cependant, encore plus fortement corrodé.

Les directions des bissectrices et des axes optiques ont été déterminées surtout à l'aide de sections orientées cristallographiquement, preparées en partie par Steeg & Reuter de Homburg et en partie dans notre Service Géologique même. Il s'agit naturellement de la substance de la couche (5), qui constitue la partie principale des phénocristaux petits et moyens, et en partie aussi de la zone (6) des grands, qui en forme l'enveloppe extérieure.

Ne disposant au commencement que de sections parallèles aux faces du prisme (110), j'ai cherché à déterminer la position des bissectrices et des axes optiques, en mesurant l'obliquité d'extinction, d'abord sur le plan même de la section et ensuite sur d'autres plans de la zone des prismes, que j'obtenais en inclinant la section autour de la trace de (010), l'axe de la zone [001], au moyen de la platine Klein. Si ces mesures étaient réputées suffisamment exactes, il serait facile, à l'aide des formules que j'ai présentées (¹), de calculer l'obliquité principale de la zone [001], c'est-à-dire l'obliquité sur (010), et l'angle des axes optiques. Comme les observations ont été faites dans l'air (l'utilisation des lentilles demi-sphériques libres conduisant à des résultats moins

(¹) «*Communicações*», t. IV, p. 35, form. (14) et (15), 1900.

sûrs), il fallait réduire les angles d'inclinaison de la section, mesurés au moyen du cercle vertical de la platine mobile, en divisant leurs sinus par la moyenne des indices principaux de réfraction du minéral, pour obtenir, avec une certaine approximation, la position, dans la zone, des plans auxquels appartenaient les obliquités d'extinction observées. Et pour avoir, ensuite, les angles de ces plans avec le pinacoïde (010), qui sont les angles v et v' entrant dans les formules en question, il fallait ajouter aux inclinaisons ainsi réduites à la substance du cristal l'angle de la face du prisme (110) avec la pinacoïde (010).

Ne connaissant pas les indices de réfraction du minéral, j'ai adopté la moyenne des indices de l'augite de *l'Auvergne*, d'après M. Lévy :

$$1{,}721 = \frac{1{,}712 + 1{,}717 + 1{,}733}{3}.$$

Je réunis dans le tableau suivant les éléments d'observation et leurs réductions qui ont servi de base au calcul.

p	a_0	a_r	v	s
f(110)	0	0	43°35′	41°54′
f_1	— 20° 0′	— 11° 28′	55 3	36 28
f_2	— 39 20	— 21 37	65 12	33 25
f_3	+ 19 50	+ 11 22	32 13	44 8

Les cinq colonnes successives de ce tableau signifient :

les notations des plans d'observation (p) ;
les angles d'inclinaison de la platine, observés, (a_0) ;
les angles des vrais plans d'observation avec le plan (110) de la section, déduits des précédents à l'aide de la formule

$$\sin a_r = \sin a_0 : 1{,}721, \ (a_r) ;$$

les angles des plans d'observation avec le plan des bissectrices (010) ($v = 43°35' - a_r$);

les obliquités d'extinction observées, rapportées à la vibration positive et à l'axe de la zone [001], autour duquel on a fait tourner la section (ε).

L'angle a_0 est positif ou négatif suivant que le plan d'observation auquel il appartient se trouve respectivement plus rapproché du pinacoïde latéral (010) ou du pinacoïde transversal (100) que la face du prisme parallèle à la section. Alors, la formule

$$v = (110):(010) - a_r = 43°35' - a_r$$

(a_r étant toujours de même signe que a_0) fournit immédiatement l'angle v du plan d'observation vrai avec le plan des bissectrices (010).

Si, dans la formule [1]

$$\operatorname{tg} 2s = \frac{\sin(v'+v)\sin(v'-v)}{\operatorname{cotg} 2\varepsilon \cos v \sin^2 v' - \operatorname{cotg} 2\varepsilon' \cos v' \sin^2 v},$$

on introduit les paramètres (v, ε) des quatre plans f, f_1, f_2, f_3, tout en les combinant deux à deux, on obtient pour s, qui est l'obliquité principale d'extinction de la zone c[001] ou l'angle ($c\gamma$) de l'axe de cette zone avec la bissectrice positive, les valeurs

40°27'	au moyen de	f_1 et f_2
46 7	»	f_2 » f_3
47 25	»	f_3 » f_1
49 26	»	f » f_1
46 41	»	f » f_2
46 32	»	f » f_3,

[1] L. c., p. 35, form. (15).

dont la première et la quatrième doivent être rejetées comme s'écartant par trop de la moyenne, et elle-ci devient alors égale à

$$46°41'.$$

Ce serait, d'après ces observations, l'angle $(c\gamma)$.

Ce n'est qu'après avoir ainsi déterminé cet angle par le calcul basé sur une série d'observations stauroscopiques, que j'ai eu à ma disposition des sections parallèles à $b\,(010)$ et à $a\,(100)$. J'ai pu mesurer alors directement l'angle $(c\gamma)$ et j'ai trouvé

$$(c\gamma) = 46\,{}^3/_4{}^\circ$$

(dans l'angle obtus (ca) des axes cristallographiques) comme moyenne de plusieurs angles observés, variant de 46° à 47 $^1/_2$°, et en parfait accord avec le résultat obtenu par le calcul.

Au moyen de cette valeur et de l'angle d'extinction sur le prisme, qui est

$$\varepsilon = 41°54'$$

(v. le petit tableau de p. 60), j'ai calculé l'angle des axes optiques par ma formule [1] et obtenu

$$2V_\gamma = 58°14'$$

ou $$V_\gamma = 29°\ 7'.$$

Mais, cet angle, j'ai pu aussi le mesurer directement sur une préparation parallèle au pinacoïde transversal (100). L'axe optique qui se trouve dans l'angle obtus $(c\gamma)$, et que j'appellerai A, émerge de (100) dans l'air et il est facile de mesurer l'angle qu'il fait avec la normale de (100), en fixant la plaque mince sur la platine mobile Klein, de façon que le plan des bissectrices soit perpendiculaire à l'axe horizontal de la platine et partant à l'un des fils du réticule. On n'aura alors qu'à placer les nicols accou-

---

[1] L. c., p. 35, form. (14).

plés, avec leurs sections principales croisées, à 45° des fils du réticule et à incliner le disque de la platine d'un côté et de l'autre jusqu'à extinction complète (en lumière parallèle). Dans ces circonstances, il ne peut y avoir d'extinction que si un axe optique émergeant prend la direction de l'axe du microscope, parce que, la rotation autour de la normale optique conservant les plans de polarisation, qui continuent par conséquent à passer par les fils du réticule, l'extinction ne peut avoir lieu que l'orsqu'elle devient indifférente. En faisant ensuite tourner les nicols croisés, on peut se convaincre, par la conservation de l'extinction, que l'axe optique est centré, et corriger l'inclinaison si l'on s'aperçoit d'un faible éclairement.

Après avoir fait la lecture du cercle vertical, on redresse la préparation, on la rend perpendiculaire à l'axe du microscope au moyen du dispositif d'autocollimation dont j'ai parlé plus haut et on fait de nouveau la lecture du cercle vertical. La différence des deux lectures donne l'inclinaison de l'axe optique émergeant (dans l'air) à l'égard de la normale de (100). Pour avoir l'angle de la direction même de l'axe, on n'a qu'à diviser le sinus de l'angle mesuré, par l'indice principal moyen du cristal. Le procédé orthoscopique (en lumière parallèle) m'a donné ici de très bons résultats, l'extinction indifférente, dans l'onde se propageant suivant l'axe optique, étant très précise.

Je passe à l'exposition des résultats obtenus. Comme il a été dit plus haut, c'est seulement l'axe A qui émerge de (100), car l'axe B s'y réfléchit totalement contre l'air. L'angle d'émergeance de A a été trouvé égal à

$$26\,{}^1/_4{}^\circ.$$

Outre cette mesure dans l'air à l'aide de la platine Klein, j'ai fait aussi celle de l'angle en question lorsque l'axe émerge dans un liquide à haut indice de réfraction, la naphtaline monobromée, en fixant la lamelle à l'appareil goniométrique du même savant. Le liquide d'immersion était contenu dans une petite cuve cylindrique, dont une partie du pourtour a été remplacée par un verre à faces planes parallèles, qu'on tourne vers l'objectif du microscope et qu'on rend perpendiculaire à l'axe de celui-ci par le procédé d'autocollimation. A cette fin, le

support de la cuve, une tige métallique verticale le long de laquelle glisse le bras horizontal dont l'extrémité échancrée sert à fixer la petite cuve, repose sur un plateau dont deux des trois pieds portent des vis qui permettent de l'incliner dans une large mesure.

L'angle d'émergeance dans la naphtaline monobromée a été trouvé de

$$15°22,5' \text{ et } 15°18',$$

dans deux observations successives, l'une à la lumière du sodium et l'autre à celle du pétrole, en laissant de côté une troisième observation à la lumière du jour, beaucoup moins précise, qui a fourni 14°54'. L'indice de la naphtaline a été déterminé immédiatement après ces observations par la mesure, dans ce liquide, de l'angle 2H des axes optiques d'une plaque de mica noir dont l'angle 2E dans l'air était connu d'avance. On avait alors pour l'indice du liquide

$$n = \frac{\sin E}{\sin H}.$$

J'ai obtenu ainsi, en lumière jaune,

$$n = 1,658 \ (21°C.).$$

Il résulte de cet indice, pour l'angle d'émergeance de l'axe A de l'augite dans l'air, étant donné l'angle de 15°22,5' dans le liquide,

$$(A:(100)_n)_{air} = \text{arc}(\sin = 1,658. \sin 15°22,5') = 26°5',$$

une valeur qui s'écarte à peine du résultat de l'observation directe (26°15'). La moyenne de ces deux déterminations, que nous adopterons définitivement, est

$$26°10'.$$

En prenant 1,72 comme indice principal moyen approché de l'augite (celui de l'augite de l'*Auvergne*, d'après M. LÉVY), on aura pour l'angle de l'axe A avec la normale de (100) dans le cristal (l'angle vrai):

$$(A:(100)_n) = \text{arc}\left(\sin = \frac{\sin 26°10'}{1,72}\right) = 14°51',$$

tandis que, d'après les positions des bissectrices et des axes optiques obtenues précédemment à l'aide d'observations stauroscopiques sur (010) et (110), sans l'intervention d'un indice de réfraction moyen plus ou moins approché, cet angle serait de

$$90° - (c\gamma) - V_\gamma = 90 - 46\,{}^3/_4° - 29\,{}^1/_{10} = 14\,{}^1/_6°.$$

La différence des deux résultats est de 42′ et leur moyenne de 14,5°. Par l'adoption de cette valeur pour l'angle de l'axe A avec la normale de (100), l'angle des axes optiques avec la bissectrice positive (et aiguë) deviendra

$$V_\gamma = 90 - (c\gamma) - 14,5° = 28^3/_4°,$$

et l'angle aigu des axes optiques

$$2V_\gamma = 57,5°.$$

Ce sont les angles qui ont été inscrits dans la fig. 7.

La biréfringence a été déterminée sur une section (010), avec le compensateur de BABINET pour la différence de marche. Pour la mesure de l'épaisseur, je me suis servi de l'oculaire micrométrique, ayant suspendu la lamelle dans l'appareil goniométrique KLEIN, et rendu son plan parallèle à l'axe du microscope par une rotation de 90° à partir de la position de perpendicularité, obtenue préalablement à l'aide du dispositif d'autocollima-

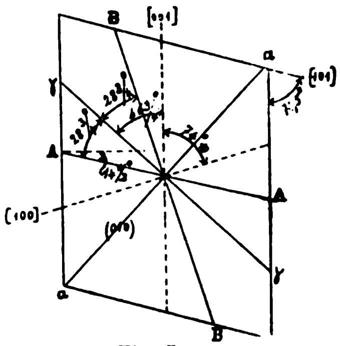


Fig. 7

tion. Ce procédé m'a donné

$$\gamma - \alpha = 0{,}020.$$

D'un autre côté, j'ai trouvé, au moyen d'une macle à extinction symétrique, à 47°, environ, de la trace de (100), une biréfringence de 0,021. Sur la face du prisme la biréfringence est de 0,009 seulement.

Le pléochroïsme, dans les lamelles très minces, est à peine sensible. L'onde qui vibre parallèlement à β est jaunâtre, les deux autres ondes principales sont d'un gris rosé, qui s'accentue avec l'épaisseur, devenant vaguement rougeâtre. D'un autre côté, le pleochroïsme disparaît tout-à-fait lorsque l'épaisseur descend au-dessous d'une certaine valeur.

L'augite renferme des octaèdres de magnétite, des prismes courts d'hornblende, les deux minéraux accolés parfois l'un à l'autre, et des plages de calcite fibreuse, qui forme aussi des veinules de remplissage. Qu'il s'agit de calcite et non pas d'aragonite, malgré la texture fibreuse, c'est ce qu'on reconnaît à la figure d'interférence en lumière convergente, qui est celle des cristaux uniaxes.

On observe aussi des inclusions de verre à vacuole, plus ou moins allongées, parfois même tubulaires, disposées en séries courbes parallèles qui rappellent les courbes de niveau des cartes topographiques.

Les phénocristaux d'augite ont été fréquemment attaqués et dissous à leur surface par le magma après leur formation complète, d'où les invasions de pâte que l'on remarque quelquefois sur les bords des sections.

L'altération de l'augite se manifeste non seulement par le carbonate de chaux, dont je viens de faire mention, mais aussi par le remplissage chloritique de petites fentes et l'épidotisation de larges plages centrales.

Il me reste à parler de la couche extérieure de ces cristaux, pour l'étude de laquelle je disposais de deux sections, l'une parallèle à la face du prisme et l'autre au pinacoïde transversal (100). Ayant été taillées dans la surface d'un cristal, elles appartenaient tout entières à l'enveloppe. La première m'a servi à déterminer la position des bissectrices et des axes optiques

par le procédé des inclinaisons à l'aide de la platine **Klein**. Voici le tableau des observations, analogue à celui de p. 60, avec les angles réduits au moyen de l'indice 1,72 (a_r), et l'angle v rapporté à (010):

p	a_0	a_r	v	ε
f (110)	0	0	43°35′	45°30′
f_1	− 20° 0′	− 11°28′	55 3	39 27
f_2	− 40 0	− 21 56	65 31	35 7
f_3	+ 19 55	+ 11 25	32 10	48 10
f_4	+ 39 40	+ 21 46	21 49	50 17

L'obliquité d'extinction sur le prisme même, c'est-à-dire mesurée avec la section perpendiculaire à l'axe du microscope, était de 45°30′ (moyenne de plusieurs observations concordantes).

En combinant deux à deux les couples de paramètres (v,ε) des cinq plans du tableau au moyen de la formule de p. 61, on obtient les valeurs suivantes pour l'obliquité principale $s = (c\gamma)$:

53°44′	au moyen de	f et f_1	46°17′	au moyen de	f_1 et f_2
51 29	»	f » f_2	51 52	»	f_1 » f_3
51 2	»	f » f_3	51 57	»	f_1 » f_4
51 43	»	f » f_4	51 13	»	f_2 » f_3
51 58	»	f_3 » f_4	51 41	»	f_2 » f_4

Si on laisse de côté la seule valeur de 46°17′, qui s'écarte beaucoup trop de la moyenne, on a pour celle-ci:

$$(c\gamma) = 51°51'.$$

Au moyen de cet angle et de l'obliquité de 45,5° sur la face

du prisme, j'ai calculé l'angle des axes optiques par la formule que j'ai citée dans la note de p. 62 (1) et j'ai obtenu, comme résultat

$$2V_\gamma = 44°55'$$

ou
$$V_\gamma = 22°27'.$$

Avec une section parallèle à (100), fixée sur la platine Klein, j'ai pu aussi mesurer l'angle d'émergence, dans l'air, de l'axe optique A; il est de 29,5°. En réduisant cet angle, au moyen de l'indice approché 1,72, à l'angle vrai (intérieur), on obtient

$$\text{arc}\left(\sin = \frac{\sin 29{,}5°}{1{,}72}\right) = 16°38',$$

d'où l'angle V_γ:

$$V_\gamma = 90° - (c\gamma) - 16°38' = 21°31',$$

qui diffère en 56' de l'angle calculé 22°27'. C'est la moyenne de ces deux angles, c'est-à-dire 22°, qui se trouve inscripte dans la fig. 8. Ces constantes peuvent être regardées comme celles de la substance prédominante de la couche enveloppe des phénocristaux d'augite. Mais je ferai remarquer que j'ai observé sur des sections sensiblement parallèles à (010) des obliquités d'extinction variables, allant jusqu'à 55,5° et des angles d'émergence sur (100) jusqu'à 30 3/4°. On peut, en somme, regarder comme établi que l'angle $(c\gamma)$ est d'autant plus grand

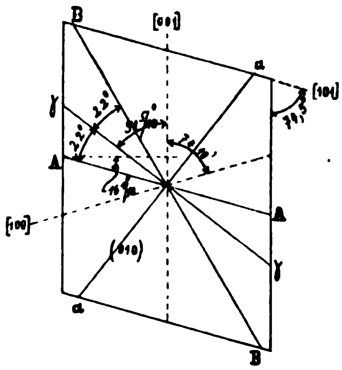


Fig. 8

(1) Voici cette formule:

$$\cos 2V = \frac{2 \cos v \operatorname{cotg} 2\varepsilon \sin 2s - (1 + \cos^2 v) \cos 2s}{\sin^2 v}.$$

que la couche d'augite s'est déposée plus tard, et que l'angle V_γ devient plus petit en même temps.

L'enveloppe, dont il vient d'être question, est bien plus foncée que le noyau, d'où il résulte que son pléochroïsme est plus sensible quoique de même caractère.

Voici ce que j'ai pu constater quant à la dispersion. J'ai observée une forte dispersion de l'axe B avec $\rho > \upsilon$ autour de γ, dans une section normale à cet axe optique, qui se trouve le plus près de l'axe de zone [001], ce qu'on reconnaît immédiatement à ce que les traces des deux clivages (110) se coupent à environ 87,5° (l'angle du prisme). Par contre, l'axe A, que j'ai aperçu souvent dans les préparations suivant (100), ne montre pas de dispersion bien marquée. De là une dispersion nécessaire des bissectrices avec $(c\gamma_\rho) < (c\gamma_\upsilon)$, comme pour d'autres augites basaltiques. Cependant ce n'est que dans des lamelles assez épaisses, parallèles à (010), que j'ai pu remarquer l'absence de position d'extinction complète et des teintes complémentaires de polarisation de côté et d'autre du minimum d'éclairement. Ceci prouve, en même temps que sa couleur et la faible reaction de TiO_2, que l'augite en question est une augite basaltique ordinaire et non l'augite titanique.

D'autres phénocristaux de cette roche appartiennent à la *magnétite* et à la *pyrite*, les premiers en octaèdres simples, souvent accolés à l'hornblende et à l'augite ou incrustés dans leurs bords, ceux de pyrites, très rares, en cristalloïdes assez développés où le cube semble dominer, accompagné toutefois du dodecaèdre pentagonal caractéristique.

La pâte. La pâte de cette roche est constituée essentiellement par de la magnétite, des prismes d'hornblende et d'augite de la forme même des phénocristaux respectifs, et du mica magnésien, le tout baignant dans une masse de feldspaths allongés suivant l'arête *a* [100] et plus ou moins applatis parallèlement à M (010).

La magnétite est en grande quantité et communique son magnétisme à l'échantillon. J'ai aussi observé, quoique très rarement, des lamelles hexagonales d'ilménite, de la couleur bien caractéristique de ce mineral, mais je les tiens pour secondaires, provenant de la décomposition d'une partie des éléments de la roche.

L'hornblende de la pâte est identique à celle de la partie dominante des phénocristaux (noyau des cristaux plus petits). L'enveloppe mince rougeâtre de ces derniers leur fait complètement défaut.

L'augite est du type bacillaire marqué, parfois très allongé même (suivant l'arête c [001]), et souvent maclée suivant la règle ordinaire. J'en ai mesuré plusieurs fois l'obliquité d'extinction sur des sections à forte biréfrigence et sur des sections symétriques de macles, et je l'ai trouvée d'environ 47°, ce qui prouve que cette augite ne diffère pas de celle des phénocristaux. Ce résultat est confirmé par la présence d'une enveloppe dont l'obliquité d'extinction est de plus de 50°, tout-à-fait comme pour ceux-là. Elle montre souvent la structure de sablier, bien connue chez ce minéral, et alors les pyramides de croissance de s (111) ont une obliquité d'extinction inférieure à celles des pyramides des faces appartenant à la zone des prismes ; c'est sur ces dernières que j'ai observé les extinctions à environ 47° de l'arête verticale.

Le mica, d'un brun très rougeâtre, se présente surtout accolé aux grains de magnétite, auxquels il fait parfois une bordure continue, mais aussi en cristaux lamellaires de contour hexagonal, isolés ou en groupes à orientation uniforme. Il est fortement pléochroïque par la différence remarquable d'absorption des deux ondes principales, celle qui vibre parallèlement à la base étant d'un brun rougeâtre très foncé, tandis que l'autre est jaune clair. Le plan des axes optiques est parallèle à (010) et l'angle de ces derniers de 30° à 35°.

Des trois composantes colorées de la pâte, c'est l'augite qui y prend part en plus grande quantité, l'hornblende ne venant qu'après, au contraire de ce qui a lieu pour les éléments de la première génération. Je fais remarquer que le mica ne se présente que dans la pâte, manquant absolument parmi les phénocristaux.

Le feldspath est un plagioclase dont la composition évolue graduellement dans le sens d'une acidité croissante du centre vers les bords. Cependant, cette continuité dans la variation de la composition n'atteint pas tout-à-fait la périphérie, où se trouve, comme enveloppe, une couche distincte, délimitée nettement en dedans par des faces cristallographiques, parmi lesquelles M (010) se fait toujours remarquer par sa trace longue et bien rectiligne. La mesure de l'obliquité d'extinction sur des sections nor-

males aux bissectrices et des sections de la zone de symétrie de la macle de l'albite etc., m'ont démontré qu'il s'agit, pour le centre du noyau, d'un labrador basique, et que l'acidité augmente jusqu'à celle du labrador normal (à 50 % An) ou un peu plus encore dans le bord du noyau. Voici quelques observations à l'appui.

Sur une section de la zone de symétrie de la macle de l'albite, d'un cristal doublement maclé suivant les lois de Carlsbad et de l'albite, les obliquités d'extinction étaient de $\pm 27°$ et $\pm 10,5°$, ce qui définit le labrador et une section à 45° environ de la section normale du prisme (110) ($\varphi = 0$, $\lambda = \pm 45°$).

L'obliquité d'extinction symétrique maxima de la macle de l'albite a été trouvée égale à 30°, d'où il résulte que le feldspath contient, au moins, 54 % an.

L'obliquité d'extinction de 27° à 30°, que j'ai observée sur une section normale à la bissectrice négative (α), dans le centre du noyau, conduit à un résultat semblable. Sur le bord du noyau l'obliquité baissait à 25°. Or, le pôle de α dans le labrador a pour coordonnées $\varphi = -20°$ et $\lambda = +41°$ [1], et à un tel pôle correspond déjà dans l'andésine une obliquité d'extinction de 17° environ. Le bord du noyau est lui-même, par conséquent, à peine plus acide que le centre, et, en effet, quoique la section ne soit plus normale à la bissectrice α du feldspath du bord, celle-ci en émerge cependant obliquemment dans un champ conoscopique de 0,9 d'ouverture numérique.

Le feldspath de l'enveloppe, qui s'appliquait le long des faces M(010), éteignait parallèlement à la trace de ces dernières ou, du moins, ne présentait pas d'obliquité sensible; sa très faible biréfringence ne permettait pas de bien juger de la position d'extinction maxima. Cette biréfringence si faible, un pouvoir de réfraction de beaucoup inférieur à celui du noyau, comme j'ai pu constater en élevant et abaissant tour à tour le tube du microscope, et le manque absolu de lamelles maclées semblent mettre hors de doute que cette enveloppe est simplement de *l'orthose*.

---

(1) D'après les diagrammes dans *Mikroskopische Physiographie*, etc., de *H. Rosenbusch*, t. I, part. 2, 1905.

Le feldspath est plein de microlites aciculaires à allongement négatif et faible biréfringence, qui appartiennent à *l'apatite*.

Je vais maintenant m'occuper de certaines masses, qui remettent sur le tapis la question, tant de fois discutée déjà, à propos de roches analogues, de la présence de la néphéline. Il s'agit, dans l'espèce, de masses de calcite fibreuse enveloppant un cristal isotrope idiomorphe à délimitation très nette, parfois deux de ces cristaux réunis. La calcite est elle-même entourée d'une substance à biréfringence excessivement faible et parfois tout-à-tait nulle, sillonnée dans tous les sens de cristaux bacillaires très allongés et plus on moins fortement recourbés, comme des rubans étroits, rappelant parfois les fleurs de glace, l'hiver, sur les carreaux des fenêtres.

Ces masses diverses sont representées dans les fig. 9 et 10, où

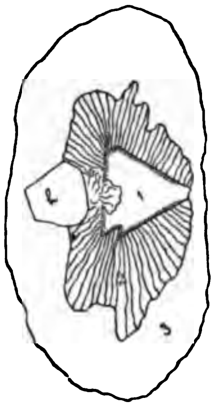


Fig. 9

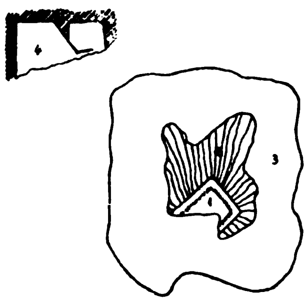


Fig. 10

les chiffres 1, 2, 3 désignent respectivement les cristaux isotropes, la calcite fibreuse et *la substance mixte* (nous donnerons ce nom au mélange de la substance quasi-isotrope avec les cristaux bacillaires recourbés). Dans une de ces masses (fig. 9), un cristal d'hornblende (*h*) se trouve pris entre la calcite et la substance mixte, et l'esquisse 4 (fig. 10) représente deux cristaux isotropes accolés, que j'ai observés dans une autre masse.

Les cristaux isotropes, presque toujours uniques, se présentent soit sous la forme de sections triangulaires à côtés à peu près égaux et à sommets en partie remplacés par de tout petits traits à environ 60° des grands côtés, soit sous celle de carrés

ou rectangles, dont les sommets sont aussi parfois tronqués symétriquement. Ils sont assez grands, atteignant fréquemment les dimensions des petits phénocristaux d'hornblende. Dans la section de la fig. 9, les trois faces coupées suivant les côtés du triangle ne sont pas perpendiculaires à la section, mais, bien au contraire, elles s'écartent fortement du centre de celle-ci dans le sens du couvre-objet vers le porte-objet, comme j'ai pu constater en abaissant le tube du microscope. Ce fait démontre que la taille a enlevé, du côté tourné vers le couvre-objet, un sommet, peut-être celui du cube, du cristal. Les sections de ces cristaux sont claires et transparentes dans toute leur étendue, à l'exception d'un filet, voisin du bord des sections, que je crois pouvoir attribuer à un phénomène de réflexion totale au passage de la lumière de la calcite dans la substance du cristal, puisqu'il disparaît lorsqu'on fait disparaître la première au moyen d'un acide.

L'isotropie de ces cristaux est parfaite, et leur indice de réfraction si faible, que la surface des sections semble fortement enfoncée par rapport à la calcite environnante. Ils abandonnent de la silice gélatineuse sous l'action des acides et se laissent teindre ensuite par la fuchsine ou le vert de malachite. Une goutte de la solution chlorhydrique, enlevée avant la tinction et abandonnée à l'évaporation sur un porte-objet, dépose des cubes à faces enfoncées, en masse. Un clivage quelconque semble manquer entièrement; ce n'est qu'une fois, justement sur la section de fig. 9, que j'ai cru l'avoir observé, et il serait parallèle aux côtés du triangle régulier. Ce serait donc un clivage cubique.

Cet ensemble de faits justifie la présomption de ce qu'il s'agit de cristaux d'analcime. La calcite qui les entoure rayonne de leur surface en faisceaux peu divergents et se trouve délimitée contre la substance mixte par une surface entièrement irrégulière, fortement ondulée et parfois déchiquetée.

Comme je l'ai fait remarquer plus haut, cette substance mixte est constituée essenciellement par un minéral en cristaux bacillaires, très allongés, et recourbés, s'entrecroisant ou formant des faisceaux divergents à allongement négatif et biréfringence de l'ordre de celle d'une feldspath, et une substance polarisant très faiblement et seulement par endroits, qui remplit les interstices et coins entre les cristaux bacillaires précités. Cette substance semble au premier abord avoir une couleur grisâtre tirant quelque

peu sur le brun, mais une observation plus attentive permet de reconnaître qu'elle est en elle-même incolore et que sa couleur lui vient d'une grande quantité de microlites, les uns aciculaires d'autres ronds ou en forme de cylindres courts (peut-être des projections différentes de corps pareils), et de granulations terreuses qui l'emplissent comme d'une fine poussière. Outre ces microlites, de la calcite se trouve aussi mélangée à la substance en question, sous forme de petits grumeaux.

Il faut rappeler que des masses de la substance mixte, dont nous venons de parler à propos des cristaux d'analcime, se trouvent aussi éparses, avec une certaine fréquence, dans toute la roche, très souvent en contact avec les phénocristaux, et parfois dans les plages de pâte qui forment des enclaves dans les grands cristaux d'hornblende. Ce sont, à proprement parler, des masses élémentaires de la pâte.

Le minéral en cristaux bacillaires recourbés ne fait pas gelée avec les acides, et ne peut pas, par conséquent, être un simple zéolite. C'est, sans aucun doute, un feldspath, de l'orthose, et cela d'autant plus probablement que son extinction n'est pas toujours tout-à-fait parallèle à l'allongement. Ce qui me semble confirmer cette manière de voir, c'est que j'ai observé plus d'une fois des cristaux du feldspath (plagioclase) basique de la pâte se terminant à une extrémité de l'axe a (100) par une houppe ou un pinceau divergent de fibres tout-à-fait semblables au minéral en question. Celui-ci s'effile aussi lui-même, souvent, donnant lieu à des branches plus délicates, ce qui contribue beaucoup à la ressemblance avec les fleurs de glace, à laquelle j'ai fait allusion plus haut. L'orthose se présenterait donc non seulement entourant les cristaux du plagioclase basique plus ancien que lui, et en conséquence idiomorphe à son contact, mais aussi sous la forme de houppes et de faisceaux fibreux, et alors idiomorphe lui-même, parce que baignant dans une substance qui s'est solidifiée plus tard, dans les derniers coins et interstices de la roche.

Cette substance intersticielle se trouve aussi, indépendamment du feldspath fibreux qui l'accompagne dans les masses mixtes, remplissant les espaces angulaires plus ou moins aigus entre les grands feldspaths (labradors) ou simplement adossée à ceux-ci aussi bien qu'aux phénocristaux de toute espèce, qui, les uns comme les autres, gardent toujours leur forme cristalline. Elle fait gelée avec les acides.

Son isotropie n'est pas absolue, comme je l'ai déjà annoncé, mais elle ne fait que polariser très faiblement et seulement par endroits, en facules. Il est de la plus grand importance pour sa diagnose de faire remarquer que le feldspath est parfaitement et invariablement idiomorphe à son contact. Il s'agit donc ici, sans le moindre doute, d'un reste du magma, dont, au moment de la solidification, se sont encore séparés le feldspath bacillaire en houppes et faisceaux aussi bien que les microlites et granulations, en donnant lui-même lieu à une mésostase vitreuse.

Quant aux cristaux d'analcime, isolés au milieu des masses de calcite fibreuse et assurément secondaires, leur formation reste très difficile à expliquer. Le carbonate de chaux de ces masses, aussi bien que celui qui remplit les pseudo-olivines et se trouve disséminé en grande quantité dans toute la pâte, provient évidemment de solutions ayant traversé les calcaires des formations (jurassique, crétacique) qui encaissent ces filons, car ni l'olivine aurait pu le fournir, ni, d'un autre côté, l'augite ou le feldspath se trouvent suffisamment décomposés, ce dernier pas même au centre, plus basique, de ses cristaux, comme il arrive souvent. Les faisceaux de calcite fibreuse ayant le cristal d'analcime pour point d'appui, il faut que celui-ci ait préexisté à ceux-là. On peut donc se figurer que le noyau des masses telles que celles qu'on trouve représentées dans les fig. 9 et 10 a été d'abord dissous, et que ce n'est qu'ensuite que le cristal d'analcime s'y est developpé, peut-être aux dépens des masses environnantes. À un moment donné, le développement du cristal a dû s'arrêter, et la solution aura alors déposé la calcite à partir de la surface du cristal d'analcime formé, et rayonnant de là dans toutes les directions.

Rien ne laisse entrevoir quel a été le minéral primitif, qui, préalablement dissous, a fourni la place et la substance de l'analcime. Il se peut que ce soit la néphéline, mais aussi la sodalite et même une plagioclase plus ou moins basique, dont la chaux se retrouverait dans une partie du carbonate associé. Je penche, en effet, à croire que la roche possédait, quoiqu'en très petit nombre, des phénocristaux de feldspath, et que ce sont ceux-là qui, sous l'action de solutions de nature spéciale, ont donné lieu aux cristaux d'analcime entourés de calcite fibreuse.

Quelquefois la substance mixte manque entièrement autour de la calcite qui enveloppe le cristal d'analcime. D'un autre côté, j'ai observé aussi des masses de calcite fibreuse sans cristal d'anal-

cime au milieu, du reste tout-à-fait pareilles aux autres et entourées aussi de la substance mixte. Les cristaux d'analcime touchent toujours par une surface plus ou moins étendue à la substance mixte, à la pâte ou à un phénocristal, de façon que la masse rayonnante de calcite qui les entoure se trouve interrompue par cette surface de contact, à partir de laquelle ils ont commencé à se former.

Outre la calcite, une grande quantité de chlorite fibreuse d'un vert très clair, à allongement négatif et sensiblement uniaxe, se trouve disséminée dans toute la roche. Une étude superficielle pourrait laisser subsister une confusion de la mésostase, dont j'ai parlé plus haut, avec cette chlorite bien caractérisée, malgré l'absence de coloration chez la mesostase. Pour moi, il ne peut pas en être question ; tout au plus s'agirait-il pour celle-ci d'une évolution chloritique, d'une transformation plus ou moins avancée dans un minéral de ce groupe mais non d'une identité avec la chlorite dont je viens de parler. Celle-ci présente tous les caractères d'un minéral formé un peu partout dans la roche, on pourrait dire au hasard des circonstances qui ont déterminé son dépôt, d'un produit d'émigration en un mot, tandis que la substance de la mésostase se trouve confinée à des endroits déterminés, auxquels, d'après son origine, elle devait se former, quoiqu'elle ait pu y évoluer plus tard dans le sens d'une chloritisation.

D'après l'étude que je viens de présenter, et auquel j'ai le regret de ne pas pouvoir ajouter des recherches chimiques, on verra aisément que la roche de *Praia dos Degraus* possède une composition minéralogique analogue à celle des *teschenites*, quoiqu'elle semble contenir beaucoup moins d'analcime que les formes caractéristiques de ces dernières. Mais si l'on tient à préciser la notion de *teschenite* comme celle d'une famille de roches à structure hypidiomorphe grenue, la structure propre des roches de la profondeur, on sera obligé d'en séparer la roche que je viens de décrire, car elle s'écarte fondamentalement de cette notion par sa structure générale, qui est caractéristiquement *porphyrique*, et par celle de sa pâte dans la composition de laquelle entre une base vitreuse, le tout en parfaite harmonie avec sa nature filonienne. Il nous semble donc nécessaire de créer une nouvelle famille de roches de filons, qui correspondra aux teschenites parmi les roches batholitiques.

Je propose de leur donner le nom *d'espichellites*, du Cap Es-

pichel, d'où proviennent les roches qui font l'objet de ce travail. La nouvelle famille fera partie du groupe des *lamprophyres*, dans lequel elle prendra place à côté des *camptonites* et des *monchiquites*, peut-être entre ces deux formes.

Nous aurions alors dans la roche de *Praia dos Degraus* une *espichellite* à structure porphyrique.

II. La roche de *Sejxalinho*

(gros filon couche)

C'est une roche noire, compacte, chez qui la fracture tend à produire des arêtes très nettes, plus ou moins aigues. On y remarque, à la simple vue, des taches menues de calcite en petit nombre. Elle est aussi porphyrique, mais les conditions dans lesquelles s'y présentent les phénocristaux conseillent d'en commencer la description par la pâte.

Celle-ci est constituée essentiellement par de la magnétite, de l'augite, de l'hornblende, du mica magnésien et du feldspath, auxquels viennent se joindre des produits secondaires en grande quantité.

La magnétite, en grande proportion, rend la roche magnétique. Je ne crois pas qu'il y ait un autre minerais de fer, même en quantité minime, dans cette roche.

L'augite se présente en cristaux idiomorphes du type prismatique allongé, avec les formes ordinaires $a\,(100)$, $b\,(010)$, $m\,(110)$, et $s\,(\bar{1}11)$ aux extrémités de l'axe vertical. Des macles formées par deux individus de dimensions égales simplement ou avec au milieu quelques lamelles très minces alternées, sont très fréquentes. Les cristaux d'augite aiment à se réunir en groupes souvent étoilés.

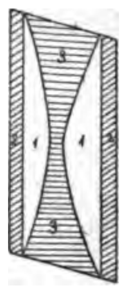


Fig. 11

L'augite présente en général la structure de sablier bien connue chez ce minéral ; les deux pyramides de croissance ayant pour bases les deux paires de faces de $s\,(\bar{1}11)$, aux deux extrémités de l'axe vertical (c), se trouvent entourées par deux couches prismatiques concentriques, comme le montre une coupe suivant (010) (fig. 11), que j'ai observée. Les obliquités d'ex-

tinction du plan de section, dont le parallélisme au plan des bissectrices a été constaté en lumière convergente, étaient de :

$(c\gamma_1) = 54°$, dans l'angle (ca) obtus

$(c\gamma_2) = 60$ »

$(c\gamma_3) = 47{,}5$ » ,

et le pléochroïsme, pour les couches prismatiques :

γ_1 et γ_2 jaune brunâtre

α_1 et α_2 rouge violacé clair,

avec

$$\alpha_1 > \gamma_1, \qquad \alpha_2 > \gamma_2,$$

et pour le sablier, bien plus clair que le reste,

$\gamma_3 = \alpha_3$ vert brunâtre.

Sur la section d'une macle, coupée aussi parallèlement à (010), où le sablier intérieur manque, mais dont les deux individus montrent les couches 1. et 2. (fig. 11), j'ai mesuré :

$$(c\gamma_1) = 60{,}5°, \qquad (c\gamma_2) = 52°.$$

Si l'on compare cette augite aux phénocristaux augitiques de la roche précédente, on remarque tout de suite que la couche prismatique externe (2.) est identique à la couche externe de ces phénocristaux ou s'en rapproche beaucoup, et que le sablier est de la nature de leur noyau. C'est la couche prismatique intérieure (1.), avec son obliquité d'extinction de 60° environ et son pléochroïsme, qui est nouvelle comme substance. J'ai pu constater, d'ailleurs, que l'onde β des couches prismatiques est rosée, de même que l'onde α.

L'extinction du plan des bissectrices, entre nicols croisés, n'est pas absolue, il subsiste toujours un peu de cette teinte bleue bien

connue chez quelques minéraux, signe certain d'une dispersion marquée des bissectrices.

L'hornblende, également idiomorphe, revêt les formes *m* (110), *b* (010) et *r* ($\bar{1}11$). Sa couleur, pour les ondes β et γ, est le brun rougeâtre très foncé de l'enveloppe des phénocristaux de la roche précédente, tandis que l'onde α est jaune brunâtre et très faiblement absorbée. L'obliquité d'extinction est de 11°, en quoi cette hornblende ne ressemble pas à celle de la couche externe des phénocristaux prénommés; il est vrai que la mesure de l'obliquité n'a été faite qu'un très petit nombre de fois, et qu'elle peut, par conséquent, être plus ou moins inexacte.

Le mica, qu'on pourrait confondre, au premier abord, avec l'hornblende, à cause de sa couleur et de son contour basal, s'en distingue par un ton plus foncé et par l'absence, dans la base, de ce dichroïsme intense que l'hornblende possède justement sur les plans voisins de la section normale du prisme, qu'on serait enclin à confondre avec les lamelles de mica. Il se présente en plaques rhombiques (d'un angle d'environ 62°), dont les arêtes aiguës sont souvent tronquées par les faces de (010). La trace du plan des axes optiques est parallèle à la petite diagonale du rhombe, c'est-à-dire à la trace de (010) même, l'angle des axes est d'environ 30° et la bissectrice α est sensiblement normale à la base. Ses couleurs sont: brun rougeâtre pour les ondes qui vibrent dans la base (β et γ), brun jaunâtre très pâle pour l'onde perpendiculaire α. C'est le mica de la roche de *Praia dos Degraus*, que nous avons décrite précédemment; comme dans cette roche, il s'associe aux cristaux de magnétite, en les enveloppant d'une bande plus on moins large, parfois très régulière sur tout leur pourtour.

Les plaques et groupes de lamelles qui ne se trouvent pas dans cette dépendance hébergent en général de petits cristaux de magnétite.

Chez le feldspath, l'idiomorphisme est loin d'être parfait comme celui des éléments colorés, que nous venons de décrire. Ce feldspath est du type allongé parallèlement à l'axe *a* [100] et plus ou moins aplati perpendiculairement à *M* (010), et sa composition varie du centre à la périphérie sans discontinuité (zonation continue). Il se présente en macles doubles, suivant les deux règles de Carlsbad et de l'albite, parfois aussi avec des lamelles interposées d'après la règle du péricline.

Au centre, ce feldspath est une *bytownite* à environ 70 % *An*, tandis que le bord a la composition du labrador normal (à 50 % *An*), comme les observations qui suivent semblent le démontrer.

Une double macle présentait sur une paire d'individus symétriques par rapport à (010) des obliquités d'extinction de $+ 35°$ et $- 32,5°$, et sur les deux individus de l'autre paire $+ 7,5°$ et $- 10°$, dont les moyennes sont respectivement $\pm 34°$ et $\pm 9°$. Or ces deux angles d'extinction se trouvent, dans la zone normale à [010] et symétriques à l'égard de l'axe de zone [001] (macle de Carlsbad), chez un feldspath intermédiaire entre $Ab_1 An_1$ et $Ab_3 An_4$, plus voisin de ce dernier. C'est aussi le résultat que j'ai obtenu à l'aide d'une autre section, celle d'une macle également double, dont un individu était coupé à peu près normalement à la bissectrice négative (α). D'ailleurs l'obliquité maxima de 40° observé sur des sections de la zone de symétrie de la macle de l'albite conduit à une *bytownite* à 69° % *An*, en parfait accord avec les résultats précédents. Ceci pour le centre des cristaux.

Un cristal qui, dans sa partie périphérique, était sensiblement normal à la bissectrice α présentait une obliquité d'extinction de 26° (par rapport à la trace de *M*), qui caractérise le labrador normal (à 50 % *An*).

Le feldspath basique dont nous venons de parler se trouve souvent entouré d'une bande étroite d'un feldspath bien distinct, au contact de laquelle il se montre toujours idiomorphe. Le feldspath de cette bande éteint la lumière, dans toutes les sections allongées, parallèlement à la direction d'allongement et n'est jamais idiomorphe lui-même. Il est un peu trouble à cause des granulations extrêmement fixes qu'il héberge, et on constate aisément, en abaissant et élevant alternativement le tube du microscope, que son indice de réfraction est de beaucoup inférieur à celui du feldspath basique du noyau, qui, lui, est clair et tout-à-fait dénué de granulations. En outre il ne renferme jamais des lamelles maclées suivant la loi de l'albite.

En vue de ces propriétés, je tiens ce feldspath pour de *l'orthose*, qui, ayant cristallisé après le plagioclase basique, a joué le role d'un minéral de remplissage et a recherché de préférence à envelopper le feldspath calco-sodique, tout en s'orientant d'après lui, en vertu des affinités qui les unissent.

Cette roche est très riche en *apatite*, qui se présente en aiguilles très longues, parfois avec inclusion axiale tout le long du cristal. Elle envahit indifféremment tous les éléments.

Nous rencontrons de nouveau, ici, la substance quasi-isotrope et pleine de granulations, à l'égard de laquelle les feldspaths eux-mêmes sont idiomorphes, et qui remplit aussi les espaces en coin et les interstices qu'ils laissent entre eux. Elle est légèrement jaunâtre, probablement à cause d'une imprégnation par de l'hydroxyde de fer. Les feldspaths s'effilent parfois aux extremités en pinceaux fibreux, qui baignent dans cette substance, comme dans la roche précédente, mais on ne rencontre plus ici les masses mixtes isolées, peut-être parce que la décomposition, très avancée, de cette roche les a fait disparaître tout-à-fait.

Malgré son aspect macroscopique, la roche possède une structure porphyrique ; mais ses phénocristaux ont été presque entièrement la proie d'une action transformatrice générale, et à leur place on rencontre maintenant de la chlorite verte et de la calcite. Les sections en sont parfois très facilement reconnaissables, celles *d'olivine* aussi bien que celles *d'hornblende* et *d'augite*. La chlorite y forme souvent des cordons épais, boursoufflés et capricieusement enroulés, dans les boucles desquels la calcite s'est déposée.

Dans le remplissage d'un autre genre de sections, la calcite se trouve au centre, généralement sous la forme d'un seul individu, autour duquel la chlorite forme une large bande composée de faisceaux plus ou moins divergents à fibre transversale par rapport à la direction de la bande, et parfois aussi de sphérocristaux souvent incomplets, dont les faisceaux divergents ne représentent, en somme, que des sections à ouverture plus ou moins grande.

On trouve rarement des restes du minéral primitif au centre de ces remplissages chlorito-calcitiques. J'ai observé, une fois, un noyau d'hornblende au centre d'une section qui était, par sa forme, aussi bien que par le genre de dichroïsme du restant d'hornblende conservé, parallèle à (010). La calcite y manquant complètement, la chlorite seule se trouvait occuper la place de l'hornblende disparue, hébergeant des éléments de magnétite, probablement des inclusions primaires de l'hornblende. On observe aussi, encore, quelques phénocristaux d'augite, très petits si on les compare à ceux de la roche précédente, et plus ou moins

attaqués ; mais ceux d'hornblende, intacts, sont d'une extrême rareté. La magnétite ne manque pas non plus parmi les éléments de la première génération ; ses individus se trouvent de préférence adossés aux masses chlorito-calcitiques, qui étaient primitivement les phénocristaux des bisilicates.

Les deux minéraux secondaires, la chlorite et la calcite, ont envahi toute la roche, en même temps qu'ils prenaient la place de la substance des phénocristaux ; mais il ne faut pas confondre cette chlorite avec la mésostase, plus ou moins altérée, qui remplit les coins entre les feldspaths et dans laquelle baignent les houppes et faisceaux de feldspath alcalin fibreux, dont nous avons parlé plus haut. L'altération de cette mésostase, primitivement hyaline, au moins en grande partie, peut avoir été de nature à produire une variété de chlorite à coloration très faible (je ne saurais pas me prononcer définitivement là dessus), et c'est peut-être à cela qu'elle doit sa faible anisotropie ; mais elle est assurément différente de la chlorite franche, d'un vert bien marqué, qui s'est formée aux dépens des éléments colorés et a émigré dans toute la masse de la roche. Je n'ai pas de motif pour changer d'avis quant à la nature hyaline primitive de cette mésostase, que j'avais déjà eu l'occasion d'étudier, et dans de meilleures conditions, dans la roche de *Praia dos Degraus*.

Il me reste à parler du contenu des masses chlorito-calcitiques qui ont pris la place des anciens phénocristaux.

Ayant traité par l'acide chlorhydrique une des petites masses, principalement constituées par de la calcite, qui se détachent par leur couleur rose pâle sur les surfaces de fracture des échantillons, j'ai observé, après dissolution du carbonate, de tout petits groupes de cristaux rouge clair, qui étaient restés implantés dans les parois de la cavité. Les individus en sont extrêmement petits, ils n'atteignent pas 0,5 *mm* de longueur, et ont l'aspect des cristaux de harmotome et de phillipsite. L'angle des traces des deux faces d'un prisme sur la face d'aplatissement (également inclinée sur ces deux faces), mesuré avec assez de précision au microscope, était de 69,5°, un angle qui serre de très près l'angle des traces de (110) et $(\bar{110})$ sur (010) soit dans l'harmotome (69°40') soit dans la phillipsite (68°46'), et même l'angle des traces de (110) et $(1\bar{1}0)$ sur (001) chez cette dernière (70°42'). La lumière polarisée fait connaître, dans ces petits cris-

taux, une alternation de bandes à allongement positif avec d'autres à allongement négatif, difficile à systématiser. L'acide chlorhydrique les attaque, mais une goutte de la solution chlorhydrique ne précipite pas par l'acide sulfurique, ce qui prouve qu'il ne s'agit pas ici de l'harmotome, mais bien de la phillipsite. Je n'avais pas observé ce minéral dans les plaques minces, probablement parce que les groupes de ses cristaux éclataient pendant la lapidation. Du reste, ces groupes sont implantés directement sur la roche et non sur la calcite, de même que les cristaux d'analcime dans la roche précédente.

Pour recueillir un plus grand nombre de ces cristaux en groupes de phillipsite, j'ai laissé un fragment de l'échantillon plongé pendant quelques jours dans un mélange d'acides chlorhydrique et azotique. Après l'avoir retiré, j'ai remarqué que sa surface présentait en grande quantité de petites masses d'un blanc jaunâtre terreux, sans compter des cavités qui avaient été occupées surtout par de la calcite, mais où il restait encore des cloisons et des lamelles dentellées et rongées, de la même substance blanchâtre terreuse. Cette substance est le résultat de l'action des acides sur des masses de chlorite que l'on ne pouvait pas distinguer de la pâte environnante avant l'attaque; elle consiste principalement en silice, comme j'ai constaté à l'aide de la perle de sel de phosphore, au chalumeau.

Il découle de ces observations que le nombre des phénocristaux de cette roche est beaucoup plus grand que l'on ne serait tenté de le croire à la vue des masses calcitiques blanches qu'on aperçoit à la surface des échantillons. Mais ils sont en général bien plus petits que ceux de la roche de *Praia dos Degraus*, et on en rencontre rarement de très allongés, ce qui semble indiquer que l'hornblende est fortement en retrait parmi eux, en laissant l'hégémonie à l'augite.

Sur les bords des masses blanchâtres silicieuses provenant de l'attaque des masses chloritiques par les acides, on remarque fréquemment des feuillets d'un mica magnésien, franchement macroscopique, dont les propriétés diffèrent quelque peu de celles du mica microscopique de la pâte. Il est d'un brun rougeâtre à peu près identique à celui de cette dernière, mais il se dédouble en noyau et bordure, le premier possédant un dichroïsme basal assez fort, tandis que la seconde, à base beaucoup moins dichroïque, est cependant plus absorbante en même temps pour les deux

ondes. Le dichroïsme basal du noyau est :

$$\beta \text{ (rouge-brun)} > \gamma \text{ (jaune-brun)}.$$

Les axes optiques ont leur plan parallèle à (010) et leur angle est de 40° en lumière jaune. En outre, la bissectrice aiguë α est inclinée d'environ 3° (dans l'air) à l'égard de la normale de la base. C'est un mica clinorhombique bien caractérisé. Il s'agit probablement de rares phénocristaux, des cristaux de la première génération, dont la bordure, déposée vers la fin de la première période, se rapproche déjà remarquablement du mica de la pâte, tandis que le noyau possède une composition propre, dépendant de la nature initiale du magma.

Il est tout naturel que ces phénocristaux de mica, en très petit nombre, se soient réunis, aussitôt formés, à ceux des bisilicates, qui, eux, étaient très nombreux ; et cela expliquerait pourquoi, ayant mieux résisté que ces derniers aux actions décomposantes, on les trouve maintenant intacts près des bords des masses chloritiques provenant de leur tranformation.

Il paraît de cette description que la roche de *Seixalinho* n'est pas, au fond, différente de celle de *Praia dos Degraus*. Il semble, en effet, que ses phénocristaux sont bien plus petits, et peut-être plus nombreux que ceux de cette dernière; mais ce qui les en distingue principalement, c'est l'état de décomposition des phénocristaux des bisilicates, qui, à peine sensible dans la roche précédente, se trouve très avancée dans celle que nous venons de faire connaître. C'est donc aussi une *espichellite* à structure porphyrique que nous aurons à appeler la roche de *Seixalinho*.

III. La roche de la *Station Sémaphorique*

L'échantillon étudié a été recueilli à 30*m* NW 38° de la susdite station.

C'est une roche d'aspect grenu à grain très fin. On y distingue de petits cristaux prismatiques d'hornblende, dont les plans de clivage scintillent faiblement, et des éléments feldspathiques

d'un blanc sale, mats, à contours incertains. C'est, déjà par ce seul aspect extérieur, une roche bien différente de la roche de *Praia dos Degraus*, caractéristiquement porphyrique. On aperçoit, en outre, sur les surfaces de fracture, des masses de section à peu près isométrique, d'un rose très clair, atteignant jusqu'à 2 *mm* de diamètre. De petits éclats de ces masses, traités par l'acide chlorhydrique, font effervescence au commencement, mais celle-ci, due à un peu de calcite interposée, cesse bientôt, et les fragments se laissent teindre par les couleurs minérales habituelles, ce qui prouve que leur substance a fait gelée avec l'acide. Si, avant la tinction, on place une goutte de la solution chlorhydrique sur un porte-objet et qu'on laisse évaporer à la température ordinaire, on obtient de nombrenx cubes isotropes (chlorure de sodium). Nous identifierons plus tard ces masses avec la substance de certaines sections des plaques minces.

L'examen microscopique de ces plaques montre que les minéraux constitutifs de cette roche sont: la magnétite, l'apatite, l'hornblende, l'augite et le feldspath. On y observe en outre, en grande quantité, ces masses' composées de feldspath fibreux ou bacillaire recourbé et de mesostase, dont il a été question à propos de la roche de *Praia dos Degraus*, des sections isotropes de deux natures différentes et des sections purement calcitiques, qui, par leur contour, appartiennent sans le moindre doute à des cristaux d'olivine préexistants.

La magnétite s'entoure souvent d'hornblende (le mica magnésien manque ici entièrement), et elle est en assez grande quantité pour rendre l'échantillon même magnétique. Elle est altérée, à la surface, avec production d'hydroxydes de fer, qui imprégnent et colorent la roche un peu partout, et se concentrent souvent dans la calcite. Parfois elle se montre aussi transformée superficiellement en hématite.

L'apatite envahit toutes les composantes de la roche, ses prismes très longs, divisés transversalement en plusieurs segments, passant fréquemment d'un élément dans un autre et de celui-ci dans un troisième.

Ces prismes sont en général microscopiques, mais on en rencontre par ci par là de plus grands, qui, avec quelque attention, pourraient être reconnus à la loupe sur une surface de fracture. Elle renferme parfois les inclusions axiales bien connues, qui vont d'une face de la base à l'autre.

L'hornblende, avec une obliquité principale d'extinction, dans la zone des prismes, de

$$(c\gamma) = 8°$$

(moyenne de plusieurs mesures allant de 7 1/4° à 8 1/2°), est aussi par sa couleur celle de la couche externe des phénocristaux de la roche de *Praia dos Degraus*. Son pléochroïsme, qui a pu être très bien observé ici, est

α jaune brunâtre très clair

β brun rougeâtre

γ brun jaunâtre

$$\alpha << \beta = \gamma.$$

Elle se présente en cristaux prismatiques, généralement courts, avec (110), (010), (100) (cette dernière forme à faces très étroites), r (111) et la base (001) très petite; suivant (010), on remarque un clivage imparfait. C'est le minéral le plus saillant de la roche [illegible]ques.

L'augite ne dépasse jamais les dimensions microscopiques. Elle est très faiblement pléochroïque (entre verdâtre et violacé) en très claire, et possède une obliquité d'extinction ($c\gamma$) = 55°. A la partie identique à celle de l'enveloppe des phénocristaux de la première de ces roches. Les formes qui la revêtent sont les habituelles : (110), (010), (100) et s (111), et ses cristaux se réunissent volontiers en groupes, comme généralement. Elle est fortement colorée en jaune sale par les hydroxydes de fer d'altération.

Cette roche contient aussi du mica, bien que très rare. Il est apparemment identique à celui de la pâte des roches précédentes.

Le feldspath est multiple. Il y a d'abord un plagioclase polysynthétique très basique, en cristaux doublement maclés, avec parfois aussi des lamelles interposées suivant la loi du péricline. Les cristaux ne présentent pas un type prismatique accentué suivant

a [100], mais ils montrent, bien au contraire, une certaine tendance vers le type isométrique, sans cependant l'atteindre. L'extinction déambule rapidement du centre à la périphérie, montrant par là que la variation d'acidité est très petite.

Ce feldspath est très basique. J'ai observé une section complète (c'est-à-dire à 4 individus) dont une moitié de la macle de Carlsbad présentait les angles d'extinction $+40{,}5°$ et $-36{,}5°$, tandis que l'autre moitié éteignait à $+20{,}5°$ et $-15{,}5°$ de la trace de (010). On reconnaît immédiatement, à la vue des diagrammes stéréographiques des feldspaths, qu'il s'agit d'une *bytownite*. Une autre section, d'un cristal également complet, avait les obliquités $+36{,}5°$, $-29{,}75°$ et $+16{,}25°$, $-11{,}5°$, qui appartiennent encore à la bytownite. En outre, j'ai obtenu comme maximum de l'obliquité, dans la zone de symétrie de la macle de l'albite, 36,5°.

Ce plagioclase basique est en petite quantité par rapport à un oligoclase qui se présente en doubles individus maclés suivant la loi de Carlsbad, avec exclusion des lamelles minces habituelles. Il est rarement idiomorphe, et forme, dans les plaques minces, des plages étendues, dans lesquelles les autres éléments ont l'air d'être incrustés. Sa réfringence et sa biréfringence sont faibles, et, sur des sections normales à la bissectrice positive (γ), l'obliquité d'extinction contre la trace de *p* (001) est de 0° à 3°.

L'extinction de ce feldspath est cependant rarement uniforme. En général, il y a deux positions d'extinction, pour deux systèmes de taches très petites et irrégulières intimement mélangées. Sur les sections normales à la bissectrice γ, les angles d'extinction à l'égard de la trace de *p* (001) étaient de 0° à 3° pour l'un des systèmes de taches et de 5° à 9° pour l'autre. Il faut conclure de là que ces cristaux sont un mélange intime d'oligoclase et d'orthose dans des proportions variables, ce dernier étant parfois en très petite quantité ou faisant tout-à-fait défaut. Etant donnée la présence, dans cette roche, d'un feldspath alcalin en cristaux indépendants, dont nous parlerons bientôt, cette association n'a rien de surprenant.

Ces deux plagioclases se trouvent souvent entourés, aussi bien l'un que l'autre, d'un troisième feldspath, que je tiens pour du feldspath potassique, peut-être de la nature de la sanidine, à cause de l'angle des axes optiques qui m'a semblé être très petit. Ce feldspath forme aussi, à lui seul, des cristaux parfois très épais perpendiculairement à (010), dont les sections normales aux faces

de cette forme sont fibreuses, ce qui indique une lamellation paparallèle à *M* (010). Aux extrémités de l'axe *a* [100], les lamelles se recourbent en dehors, sous forme d'éventail, tandis que les interstices se trouvent remplis par la substance de la mésostase amorphe dont il a été question à propos des roches précédentes. Des côtés de ces sections fibreuses il se détache d'autres fibres également recourbées en dehors, commes les barbes d'une flèche, qui baignent toujours dans la substance de la mésostase.

Tous les feldspaths sont idiomorphes à l'égard de cette substance, et les deux plagioclases le sont aussi à l'égard du feldspath potassique, qui les enveloppe très souvent.

Les masses de substance mixte, tout-à-fait identiques à celles de la roche de *Praia dos Degraus*, prennent ici un grande développement et se trouvent souvent imprégnées d'hydroxydes de fer. Le feldspath microlitique qui en fait partie et qui est, sans le moindre doute, le feldspath potassique dont nous venons de parler, forme souvent des houppes sphérolitiques qui passent graduellement, dans les bords, à la substance de la mésostase, donnant ainsi l'impression d'une cristallisation embryonnaire; mais la règle, ce sont les cristaux bacillaires, nets, recourbés en tous sens, que nous connaissons déjà de la première de ces roches. La chloritisation de la mésostase, dans laquelle ce feldspath microlitique se trouve enveloppé, semble ici plus marquée qu'ailleurs, et de la calcite s'y trouve mélangée en proportion remarquable en même temps qu'une poussière fine et des hydroxydes de fer. Du reste, elle fait gelée avec les acides, comme dans les roches précédentes.

Il me reste à parler de certaines masses de nature secondaire auxquelles j'ai fait allusion plus haut.

Ce sont, en premier lieu, des sections incolores, parfaitement transparentes et limpides, et sans la moindre trace de clivage, portant de minces cloisons de calcite. On y remarque parfois des plages très faiblement biréfringentes, mais la règle est l'isotropie parfaite. Ces sections ont un contour irrégulier et plus ou moins arrondi, et il m'a été impossible de les rapporter à un minéral primitif quelconque. Elles se laissent teindre après attaque par les acides concentrés. Je tiens la substance de ces masses pour de l'analcime; les cloisons de calcite, d'une minceur telle que leurs teintes de polarisation appartiennent aux ordres inférieurs de l'échelle chromatique, semblent indiquer que le minéral pri-

mitif était constitué par un petit nombre d'individus à contour arrondi, entre lesquels le carbonate de chaux s'est infiltré avant que leur transformation ait avancée.

D'autres sections, à contours formés en partie par des lignes droites, possèdent un noyau trouble, avec cet aspect gonflé que donne la transformation des feldspaths en aggrégats de muscovite ou kaolin, et une bordure transparente et limpide de long des droites du contour. Elles sont aussi isotropes, mais coupées presque toujours de séries de traits ou bandes très étroites de calcite, d'un petit nombre de directions, que l'on prendrait pour un remplissage de fentes de clivage, et parsemées de petits sphérocristaux d'un zéolite fibreux à allongement négatif, qui se laisse teindre après attaque par l'acide chlorhydrique.

La substance des sections fait aussi elle-même gelée avec les acides, le noyau trouble aussi bien que la bordure, et la solution chlorhydrique dépose en quantité des cubes (isotropes). Ce sont justement les petites masses rosées qu'on aperçoit à l'œil nu sur les surfaces de fracture des échantillons, comme nous avons dit au commencement de la description de cette roche. Elles renferment, en outre, des cristaux d'hornblende, et se trouvent souvent entourées d'oligoclase.

On serait tenté de prendre ces masses pour le produit de la transformation des cristaux d'un feldspath fortement sodique, de l'albite par exemple, ou bien de l'anorthose, qui aurait cristallisé, après l'hornblende, en individus relativement grands, comme ceux de cette dernière.

Enfin, on rencontre encore, avec une certaine fréquence, des sections de calcite à contour formé en grande partie de segments de droites raccordés par des courbes plus ou moins étendues, à la place des sommets. Ces sections, occupées par un seul individu ou un très petit nombre d'individus de calcite, sont souvent entourées d'une bande de serpentine colorée en jaune vif par les hydroxydes de fer, et renferment un zéolite en aiguilles à allongement négatif, qui fait gelée avec les acides. La forme de ces sections laisse deviner d'olivine comme ayant été le minéral primitif. Elles se trouvent parfois à l'intérieur des cristaux d'hornblende et de feldspath.

J'ai eu l'occasion d'observer aussi une substance isotrope remplissant des coins entre les cristaux de feldspath, tandis que ceux-ci étaient parfaitement idiomorphes à son contact. Elle pré-

sente des hachures très serrées dans deux directions faisant un angle variable, qui sont dues peut-être à une cristallisation squelettique au sein d'un verre. Elle fait gelée avec les acides. Je la tiens pour identique à la mésostase, dont il a été fait mention à plusieurs reprises.

Il semble donc évident qu'il s'agit ici d'une roche nettement distincte par sa structure des deux roches précédentes. C'est une roche à une génération unique de chacune de ses composantes minérales, et dont la structure serait *hypidiomorphe grenue* sans la présence de la *mésostase hyaline*, plus ou moins profondément transformée, en même temps qu'une partie des éléments de la roche, en un minéral de nature chloritique et quelque calcite apparemment. La structure de cette roche est donc *l'intersertale*, qui convient à une roche filonienne ou à une roche effusive, mais en aucune façon à une roche de la profondeur.

Comme, d'ailleurs, sa composition minéralogique est tout-à-fait la même que celle de la roche de *Praia dos Degraus*, je crois devoir l'appeler une *espichellite intersertale*.

IV. Quelques roches en état très avancé de décomposition

J'ai eu encore à examiner des échantillons des roches de *Lagosteiros* et *Sobreladeiras*, et celui d'une autre roche de *Praia dos Degraus* (falaise entre le phare et l'église), différente de celle qui a été étudiée en premier lieu. Il s'agit évidemment de roches très semblables, ou du moins de la même famille que les roches précédentes, chez lesquelles la décomposition se trouve très avancée.

Dans la roche de la falaise entre le phare et l'église il ne reste d'intact, dans la pâte, que la magnétite (en partie) et l'apatite, et, de partiellement altéré seulement, le feldspath. La biotite, tantôt accolée à la magnétite, tantôt indépendante, est fortement décolorée et a perdu beaucoup de son pléochroïsme, mais non de sa biréfringence (muscovitisation). On observe encore des restes d'hornblende apparemment décolorés.

Parmi les phénocristaux, ceux d'olivine, parfois très grands, sont remplacés presque exclusivement par de la calcite, et ceux d'hornblende par de la calcite entourée d'une couche épaisse de chlorite fibreuse à allongement positif, en faisceaux peu divergents qui ont leurs axes perpendiculaires aux surfaces de la couche, comme il est aisé de constater dans les sections rhombiques, voisines de la section normale du prisme de l'hornblende. L'augite des phénocristaux se trouve remplacée simplement par de la chlorite avec des granulations d'épidote. Ils se réunissent en groupes étoilés, comme il arrive habituellement dans ce genre de roches.

Le feldspath de la pâte, en grande partie décomposé, montre, par endroits, une extinction très peu oblique par rapport à la direction d'allongement des batonnêts, ce qui semble indiquer une nature oligoclasique. Il s'agit cependant peut être déjà d'une altération du feldspath primitif, qui aurait été beaucoup plus basique, consistant dans la perte d'une partie de la substance anorthitique.

Un peu d'hydroxyde de fer, qui colore caractéristiquement la roche, provient assurément de l'altération de la magnétite, visible, du reste, dans les cristaux mêmes et dans leur voisinage immédiat.

La roche est compacte et lisse, et d'un gris clair, comme certains calcaires auxquels elle ressemble encore par les petites masses de calcite creuses, à parois intérieures hérissées de petits cristaux, qui s'y trouvent disséminées.

Le roche de *Lagosteiros* est aussi grise et d'aspect terreux, tachetée de petites masses colorées en jaune par les hydroxydes de fer.

Cette roche nous offre un état de décomposition encore plus avancé que la roche précédente. La magnétite même est ici déjà fortement attaquée avec production de grande quantité d'hydroxydes, qui imprègnent et salissent toute la roche.

La chlorite, qui a dû se former dans la première phase de la décomposition, est déjà disparue, laissant après elle une poussière noire d'une mine de fer qui contourne et dessine les batonnêts de feldspath et se faufile un peu partout.

Des masses de calcite fibreuse sous forme de sphérocristaux, en secteurs plus on moins ouverts et à couches concentriques suc-

cessives, avec point d'appui dans la pâte, ont pris la place des phénocristaux.

Il ne reste plus de trace des éléments primitifs, excepté de ceux de magnétite et de feldspath, dont la destruction n'est pas complète.

Enfin, à *Sobreladeiras*, la roche a subi une décomposition encore plus intense. La destruction de la magnétite est plus avancée, presque totale, et les produits limonitiques crasseux et peu transparents ont envahi toute la roche, en épargnant cependant les batonnêts de feldspath, que les hydroxydes de fer ne font que colorer en jaune vif, sans y déposer des granulations opaques.

Ces batonnêts sont devenus absolument isotropes; on dirait qu'après la perte des molécules d'anorthite, à laquelle nous avons attribué, dans la roche précédente, l'acidité oligoclasique du feldspath, la silicification complète est survenue, car c'est bien de l'opale qui remplace le feldspath dans ces batonnêts. Il est impossible de reconnaître si cette roche possédait une structure porphyrique, parce que même les formes des phénocristaux, s'ils ont jamais existé, se trouvent oblitérées. Ce qui fait penser à une structure porphyrique primitive ce sont des masses d'opale sans contours réguliers, qu'on eût pu attribuer à un minéral en phénocristaux.

Des éléments primitifs microscopiques, il subsiste un mica très décoloré, quoique encore fortement biréfringent; c'est bien le plus résistant des minéraux ferro-magnésiens de la roche.

Ces trois roches semblent être de même nature que les trois roches traitées auparavant, à en juger par leur contenu minéral, observé ou seulement soupçonné à travers les produits de décomposition. Ce sont donc très probablement des *espichellites*, et non des roches diabasiques, comme je l'avais cru après un examen antérieur, très superficiel, mais c'est là tout ce qu'on peut avancer sur leur nature.

Lisbonne, avril de 1906.

Appendice: La roche d'*El-Carmen*

Ce n'est que quelques mois après que j'eus terminé l'étude des roches du *Cap Espichel*, que M. Paul Choffat m'a fait remettre un échantillon de la roche *d'El Carmen*, en me faisant remarquer qu'elle forme un filon complètement isolé à une douzaine de kilomètres des teschenites de *Cezimbra*, et constitue l'affleurement éruptif le plus oriental de la *Serra d'Arrabida*, qui lui soit connu. Elle se trouve exactement à 840 *m NO* 50° *d'El Carmen*, environ 18 *km ENE* du *Cap Espichel*.

C'est une roche porphyrique à pâte compacte noire. Les phénocristaux, d'un vert grisâtre sans éclat, sont très nombreux mais en général très petits et peu apparents, d'où, au premier abord, l'aspect d'une roche simplement compacte, d'un noir verdâtre uni. Ces phénocristaux font effervescence avec l'acide chlorhydrique, ce qui décèle immédiatement leur caractère pseudomorphe et en grande partie calcitique. De rares phénocristaux plus grands, blancs ou légèrement rosés se dénoncent à la simple vue comme étant composés exclusivement de spath calcaire. Enfin, quelques petits points à éclat métallique intense, qui attirent plus particulièrement l'aiguille magnétique, sont des cristaux de magnétite de la première génération. Du reste, cette roche, à pâte très riche en fer oxydulé, est elle-même magnétique dans toute sa masse.

Au microscope, on constate qu'il ne reste en général plus rien de la substance primitive des phénocristaux, et qu'à leur place et revêtant leurs contours cristallographiques se trouvent de la calcite, de la serpentine et de la chlorite, mélangées en proportions très variables. Ces revêtements cristallographiques les font aisément reconnaître comme appartenant à l'olivine, à l'augite et à l'hornblende, ceux de cette dernière étant peut être les plus nombreux après ceux d'olivine. Cependant il n'y a que l'augite qui se soit conservé plus ou moins intacte dans quelques-uns (j'en ai compté 5 ou 6 en six plaques minces de dimensions ordinaires), l'hornblende ne s'étant montrée nulle part en substance

propre, à mon grand étonnement. L'olivine a dû être la première à disparaître sous l'empire des actions transformatrices.

L'augite est du type prismatique, un peu aplatie perpendiculairement à *a* (100), avec les formes habituelles *a* (100), *m* (110), *b* (010), *s* ($\bar{1}11$), et possède, outre le clivage ordinaire suivant *m* (110), un clivage pinacoïdal suivant *b* (010), assez marqué. Elle présente la structure caractéristique de sablier, les pyramides de croissance des faces terminales *s* ($\bar{1}11$), qui forment le sablier, étant d'un brun très clair, presque incolores, tandis que le solide annulaire enveloppant, qui porte les faces de la zone verticale [001] est brun rougeâtre, quoique encore suffisamment clair et transparent. Tout ce que j'ai pu vérifier quant aux caractères optiques c'est que l'angle des axes est petit (il m'a semblé même bien plus petit que celui de l'augite basaltique ordinaire) autour d'une bissectrice positive, suivant laquelle la biréfringence est très faible. Par contre, suivant la bissectrice négative (obtuse), la biréfringence est remarquablement intense.

Les pseudomorphoses d'olivine sont facilement reconnaissables à leur forme, surtout lorsqu'elles ont été coupées perpendiculairement à l'un des axes cristallographiques [010] et [001], à cause du développement des traces de *a* (100) et de l'angle des faces *dd* ou *mm*, placé symétriquement aux deux extrémités des susdites traces. Mais leur mode de transformation, en mailles de spath calcaire séparées les unes des autres par des bandes plus ou moins larges de serpentine fibreuse à fibre positive normale aux parois de la maille, n'est pas moins caractéristique. Cette serpentine se montre parfois fortement colorée en brun rougeâtre très vif par des hydroxydes de fer.

On reconnaît souvent aussi, au premier abord, les sections d'hornblende plus on moins approximativement perpendiculaires à la zone [001] des prismes verticaux, par l'angle du premier prisme, dont les arêtes aiguës sont, du reste, tronquées par *b* (010). Les sections pinacoïdales allongées suivant [001], terminées aux extrémités de cette direction par des angles obtus très marqués (de 30° environ) échappent aussi difficilement au regard.

Les minéraux secondaires des pseudomorphoses sont, outre la calcite et la serpentine fibreuse, une serpentine feuilletée et de la chlorite.

La serpentine feuilletée, qui rappelle beaucoup par son aspect

un mica clair, est vert-olive très pâle et presque insensiblement pléochroïque par différence d'absorption. Elle est optiquement négative, à peu près uniaxe (peut-être tout-à-fait) avec l'axe optique unique ou la bissectrice d'un très petit angle des axes normale à la base. J'ai pu déterminer axe une certaine approximation sa biréfringence sur une section perpendiculaire à la base, et elle était de $\omega - \varepsilon = 0{,}009$.

La chlorite, qui forme parfois, presqu'à elle seule, des pseudomorphoses entières, est vaguement verdâtre. très claire et transparente, et parfaitement isotrope en masse, probablement par compensation des biréfringences entre les écailles extrêmement petites et individuellement peu actives. Elle se présente parfois aussi en sphérocristaux très parfaits à noyau de calcite, ou bien elle forme, à son tour, le noyau de sphérocristaux de calcite bacillaire, et prend part, enfin, avec cette dernière, à la constitution de sphérocristaux doubles en couches concentriques.

De l'hydroxyde de fer se trouve aussi, en quantité plus ou moins considérable, dans presque tous les phénocristaux pseudomorphosés, et il forme souvent l'enveloppe sphérique d'oolites très réguliers, dont le noyau semble être un silicate de fer chloritique, de la nature de la *chamosite*, et qu'on observe surtout près des bords des masses de calcite des pseudomorphoses.

Il paraît que sous la calcite se cachent aussi, par ci par là, des cristaux de zéolites. Ayant traité une plaque par l'acide chlorhydrique très étendu, pendant un temps assez long pour dissoudre complètement le spath calcaire, j'ai trouvé, fixé à la paroi d'une cavité qu'il remplissait auparavant, un groupe de très petits cristaux prismatiques dont les caractères sont ceux de la *desmine*. Ils sont, en effet, aplatis suivant une face qui offre un contour formé par deux longues droites parallèles à l'allongement prismatique, et par deux petites droites qui, à l'une des extremités du prisme (l'autre extrémité étant celle d'implantation), renferment un angle (externe) de 61°, symétrique à l'égard de la direction d'allongement. Ces petits cristaux ont, en outre, un faible pouvoir de réfraction, un allongement de caractère optique négatif, qu'accompagne une extinction parallèle, et de leur face d'aplatissement émerge, à peu près normalement, un axe de polarisation, positif à l'égard de l'allongement, mais que je n'ai pas pu déterminer plus exactement à cause des petites dimensions des individus.

La *pâte* de cette roche est formée par un enchevêtrement compact de microlites d'augite et grains octaédriques de magnétite, auxquels viennent s'ajouter, en quantité encore considérable quoique très inférieure à celle de l'augite, des microlites de feldspath, et, très clairsemées, des lamelles de mica biotitique à bords déchiquetés.

Les microlites d'augite, allongés suivant l'axe *c* [001], revêtent les mêmes formes cristallines que les phénocristaux de meme espèce et ont pour la plupart des dimensions qui s'écartent peu de 0,008 *mm* en épaisseur et 0,03 *mm* en longueur. Ils sont souvent maclés suivant (100), parfois avec interposition de lamelles alternées des deux parties. Cette augite est vert clair et possède une obliquité maxima d'extinction, dans la zone des prismes, de 51°, moyenne des mesures faites sur 20 microlites sensiblement parallèles au plan de section de la plaque et à biréfringence elevée, qui ont donné des angles allant de 41° à 57,5°.

Cette obliquité n'est cependant qu'une valeur pour ainsi dire globale, car les microlites ont tous, à l'instar des phénocristaux, la structure de sablier, que nous avons déjà rencontrée dans les roches du *Cap Espichel*, et qu'on observe trèsbien chez quelques microlites plus développés. Ici, on aperçoit, outre le sablier, formé par le corps de croissance des faces terminales $s(\bar{1}11)$, et le corps creux qui enveloppe celui-ci, une couche extérieure d'épaisseur faible mais uniforme, qui enveloppe à son tour ce dernier et porte les faces de la zone [001]. Au moyen d'une section sensiblement parallèle à (010), j'ai mesuré l'angle $(c\gamma)$ dans chacune des trois parties et je trouvai :

$(c\gamma) = 47{,}5°$, dans le sablier

$= 54{,}0$ dans la partie qui entoure le sablier

$= 62{,}5$ dans la couche extérieure.

La moyenne des deux premières valeurs, celles qui se font le plus sentir dans les tout petits microlites, se rapproche beaucoup de l'obliquité globale moyenne, indiquée plus haut. Si l'on compare cette augite à celle de la roche de *Seixalinho*, qui possède la même conformation, on remarque que l'obliquité d'extinction

du sablier est exactement la même (p. 79), mais que l'enveloppe de celui-ci et la couche extérieure ont échangé les leurs ou plutôt ont échangé leurs places.

A plusieurs reprises, j'ai aperçu des assemblages de deux microlites se croisant sous un angle apparemment invariable et se fondant l'un avec l'autre, pour ainsi dire, au point de croisement. J'en ai mesuré, une fois que les deux microlites croisés montraient des arêtes [001] nettes et une biréfringence elevée, l'angle de ces arêtes (axes cristallographiques *cc*), et je le trouvai égal à 99°, un angle dont da moitié, 49,5°, est à très peu près l'angle des deux faces (101) et (100) (exactement de 49°49′). Ces assemblages en croix ne sont donc que des macles à plan de symétrie parallèle à (101), d'autant plus surement que la bissectrice de l'angle de 99° des axes *cc* des deux microlites est inclinée sur ces axes à l'apposé des traces de $s(\bar{1}11)$, comme il devrait être pour de telles macles.

Le feldspath se présente en microlites allongés suivant l'arête *a* [100], comme d'habitude, formés le plus souvent de deux parties maclées d'après la règle de l'albite, assez fréquemment cependant, et surtout lorsqu'ils sont un peu plus grands, de trois et même de quatre lamelles qui m'ont semblé constituer parfois de doubles macles, de Carlsbad et albitique, et non pas une simple alternation sous la règle de l'albite.

Ces microlites sont en général moins épais encore que ceux de l'augite, mais presque toujours plus longs, et parfois même si longs qu'on dirait de petits rubans bleuâtres posés sur la masse de microlites d'augite et de magnétite. Ils polarisent très faiblement, sans doute à cause de leur épaisseur minime et du fond obscur qui leur fait la pâte, ce qui rend l'apréciation de l'extinction assez difficile. Le maximum d'obliquité d'extinction symétrique de la macle albitique que j'ai observé était de 40°, tandis que les obliquités individuelles les plus fréquentes étaient comprises entre 25° et 30°, ce qui s'accorde pour définir un labrador très basique à entre 65 0/0 et 70 0/0 *An.*

Il me reste à parler de la biotite, qui se présente en écaille, et lamelles isolées clair-semées dans la pâte augito-magnétitiques mais aime aussi à se concentrer en masse près des bords des phénocristaux et à s'associer aux éléments les plus développés de magnétite. C'est un mica à pléochroïsme peu élevé pour ce minéral, brun clair dans les ondes qui vibrent parallèlement à

la base et presque incolore dans l'onde à vibration normale à celle-ci. Malgré ce pléochroïsme relativement faible, que je me trouve porté à mettre sur le compte d'un certain degré d'altération (les ondes basales mêmes sont sensiblement moins absorbées chez les éléments charriés autour des grands cristaux du premier temps que chez les autres), ce mica possède une biréfringence très intense, comme il est aisé de constater en lumière convergente au travers de la base. Il est connu que la biréfringence est le caractère du mica que résiste le mieux et plus longtemps à l'altération. Ce mica est uniaxe, ou biaxe à très petit angle des axes optiques.

Le pâte de cette roche montre par endroits, et surtout aux abords de plusieurs phénocristaux, une fluctuation évidente du magma en voie de solidification, que décèle la tendance des microlites à se rendre avec leur direction d'allongement parallèles à la partie en regard du contour des phénocristaux voisins.

La quantité de magnétite est énorme, tout-à-fait basaltique. D'autres mines de fer primaires manquent entièrement; mais dans la serpentine de quelques pseudomorphoses se trouvent de petites lamelles noires, opaques et très minces, qui semblent de simples traits noirs quand elles sont perpendiculaires à la préparation, et que je tiens pour de l'ilménite. J'ai observé aussi des grains fortement réfringents et très brillants, d'un gris violacé particulier, avec parfois une vague ressemblance à des pyramides quadratiques, qui pourraient très bien être de l'anatase. Ces deux minéraux proviendraient du dépôt de l'acide titanique rendu libre par la destruction des phénocristaux.

La pâte est, au contraire des grands cristaux de la première génération, apparemment libre de toute altération, et les minéraux secondaires semblent même ne pas l'avoir envahi, car on n'y trouve point de calcite, et, en fait de silicates verts, on n'aperçoit que des écailles isolées et rares de chlorite.

Par les éléments de la première génération, cette roche ne diffère en aucune façon de la roche de *Praia dos Degraus* (I); elle est, comme cette dernière, caractérisée par l'absence d'un feldspath quelconque et par la présence, en quantité considérable, de l'hornblende, à côté de l'olivine et de l'augite, parmi les phénocristaux. La pâte, bien au contraire, est fondamentalement différente de celle de la roche à laquelle je viens de faire allusion C'est une pâte caractéristiquement pilotaxitique et dépour-

vue de tout ce qui pourrait être rapportée à un *reste* vitreux plus ou moins transformé, entièrement dépourvue aussi d'hornblende et beaucoup plus pauvre en feldspath et même en mica, mais beaucoup plus riche en augite que la roche de *Praia dos Degraus*. Néanmoins, eu égard à l'identité des minéraux du premier temps et à l'importance décisive qu'ils ont gardé jusqu'à présent dans la systématisation des roches porphyriques, je préfère réunir la roche *d'El Carmen* avec celles que je décris dans cette notice sous la désignation commune *d'espichellites*, à créer pour elle un nom spécial, d'autant plus qu'une analyse chimique, étant donné l'état d'altération des grands cristaux, ne pourra jamais être entreprise avec succès et venir partant justifier l'adoption d'un nom nouveau. Ce sera donc une *espichellite* à pâte pilotaxitique augitocrate.

Cette roche suffirait pleinement, à elle seule, à déterminer la création d'une nouvelle famille de roches filoniennes lamprophyriques, si la roche de *Praia dos Degraus* (1) n'avait pas été étudiée et décrite auparavant. Mais, comme je l'ai fait remarquer plus haut, cette dernière étant un roche typiquement porphyrique à pâte compacte et tant soit peu hypocristalline, en même temps qu'autonome et en aucune façon un facies marginal d'une masse de la profondeur, il ne pourra jamais être question de l'assimiler aux teschenites ni de ne pas en tenir compte, mais il faudra, au contraire, lui assigner une place parmi les lamprophyres et plus particulièrement à côté des camptonites et des monchiquites de Rosenbusch.

Mai de 1907.

SUR LA COURBURE D'UNE LIGNE PLANE DANS UN POINT QUELCONQUE

PAR

GINO LORIA

Professeur à la Faculté des Sciences de Gênes (Italie)

Pour établir les propriétés graphiques d'une ligne plane on a l'habitude de déterminer ses points remarquables soit *in sè* (points multiples, points d'inflèxion, etc.), soit par rapport aux axes des coordonnées (points d'ordonnée ou d'abscisse maxima ou minima, etc.); on ajoute l'expression du rayon de courbure dans un point ordinaire, pour pouvoir déduire la loi suivant laquelle la courbure change lorsque ce point parcourt la ligne donnée. Combien nombreuses et élégantes sont les propositions qu'on peut établir de la sorte, peut-on apprendre aisément par les traités récents sur les courbes particulières (1). Mais précisément par ces traités on voit qu'on a jusquà présent laissée de côté la recherche de la courbure d'une ligne plane *dans ses points multiples.* Cependant, si on reflèchit que seulement par cette voie on arrive à la détermination exacte de la structure de la figure dont il

---

(1) G. LORIA, *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven, Theorie und Geschichte* (Leipzig, 1902); F. GOMES TEIXEIRA, *Tratado de las curvas especiales notables* (Madrid, 1905). Ouvrages couronnés par l'Académie de Madrid.

s'agit, on voit, que cette exclusion est injustifiée et deplorable. Frayer une route élémentaire pour combler cette lacune, voilà le but de cette Note: dans laquelle, en dehors de considérations générales, on trouvera plusieurcs applications à quelques courbes particulières; ces applications auraient pu être multiplées; nous ne l'avons pas fait pour laisser au lecteur le plaisir de les dévélopper lui-même, contents d'avoir signalés une source de nouveaux théorèmes sur les lignes planes particulières.

I

Soit Ω un point quelconque, simple ou multiple, d'une courbe plane arbitraire Γ; $\Omega\xi$ soit la tangente en Ω à une des branches de Γ passantes par Ω et $\Omega\eta$ la normale correspondante; soit enfin P un point de cette branche voisin à Ω. Si R est le rayon du cercle qui touche Γ au point Ω et passe par P, on aura évidement:

$$\xi^2 = \eta(2R - \eta)$$

ou bien

$$\frac{\xi^2}{\eta} = 2R - \eta.$$

Or si le point P s'approche indéfiniment à Ω, ξ et η tendent dans le même temps à zéro et le cercle considéré devient le cercle osculateur à la courbe Γ au point Ω; on a par conséquence

$$\text{(1)} \qquad R = \lim \frac{\xi^2}{2\eta},$$

R étant à présent le rayon du cercle osculateur en Ω à la branche considéré de la courbe donnée. Cette formule prouve que ξ^2 et η sont en général des infiniment petits du même ordre et

que la recherche du rayon de courbure au point Ω se réduit à celle de la limite du rapport $\frac{\xi^2}{2\eta}$ lorsque le point, $P(\xi, \eta)$ s'approche indéfiniment à Ω.

Pour montrer combien cette réduction est utile, considérons *la feuille* de DESCARTES ayant pour équation

$$(2) \qquad x^3 + y^3 = 3\,axy\,;$$

on sait que cette courbe, en déhors des branches infinies, contient une boucle symétrique par rapport à la bisectrice de l'angle des diréctions positives des axes et dont la longuer $O\Omega$ est $= \frac{3a}{\sqrt{2}}$. Pour en déterminer la courbure au point Ω prenons comme nouveaux axes de coordonnées la tangente et la normale de la feuille au point Ω; les formules réliant les anciennes coordonnées x, y aux nouvelles ξ, η sont

$$\xi = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{3a-(x+y)}{\sqrt{2}}$$

ou bien

$$x = \frac{1}{2}\left\{3a + (\xi - \eta)\sqrt{2}\right\}, \quad y = \frac{1}{2}\left\{3a - (\xi + \eta)\sqrt{2}\right\}.$$

si donc on pose pour abréger $\alpha = \frac{3a}{\sqrt{2}}$ l'équation de la feuille deviendra

$$-2\alpha^2\eta + 8\alpha\xi^2 + 4\alpha\eta^2 - 6\xi^2\eta - 2\eta^3 = 0.$$

Supposons maintenant que ξ^2 et η soient des infiniment petits du même ordre; alors l'équation de la feuille se réduira

$$-2\alpha^2\eta + 8\alpha\xi^2 = 0$$

d'où il s'ensuit que la limite de $\frac{\xi^2}{2\eta}$ est $\frac{\alpha}{8} = \frac{1}{8}\frac{3a}{\sqrt{2}} = \frac{1}{8}\,O\Omega$.

Or le même tour de raisonnement et de calcul peut s'appliquer lorsqu'il s'agit de points multiples. Considérons, en effet, comme exemple encore *la feuille de* DESCARTES et sa branche tangente à l'axe Ox ; pour trouver la valeur du correspondant rayon de courbure il suffit de supposer que dans l'équation (2) x^2 et y soient des quantités infiniment petites du même ordre ; alors cette équation devient

$$x^3 - axy = 0$$

et donne

$$R = \lim \frac{x^2}{2y} = \frac{3a}{2}.$$

Donc *le centre de courbure à la branche considéré n'est que la projection* (orthogonale) *du point* Ω *sur* Oy. La projection du même point sur Ox est pareillement le centre de courbure de l'autre des branches de la feuille s'entrecroisant en O.

Pour donner un exemple ou les deux branches se croisant au point double considéré n'ont pas la même courbure, prénons *la strophoïde (oblique)* dont l'équation est

$$(ax + by)(x^2 + y^2) - c^2xy = 0.$$

En y supposant x et y infiniment petits du même ordre on en tire

$$\lim \frac{x^2}{2y} = \frac{c^2}{2a},$$

valeur du rayon de courbure de la branche de la strophoïde tangente à Ox. Analoguement $\frac{c^2}{2b}$ est le rayon de courbure en O de l'autre branche. De ces expressions on tire aisément une construction bien simple pour les correspondants centres de courbure.

II

La recherche de la limite considerée dans l'Art. préc. peut s'efféctuer, non seulement dans chaque cas particulier, mais en général sur une courbe Γ dont on connait l'équation

$$f(X, Y) = 0. \tag{3}$$

Soit, en effet, $\Omega(x, y)$ le point dans lequel on veut déterminer le rayon (ou les rayons) de courbure et θ l'angle qu'une des tangentes à Γ au point Ω fait avec Ox. Faisons un changement de coordonnées, en prénant comme nouveaux axes cette tangente et la normale correspondente; les anciennes coordonnées X, Y d'un point arbitraire du plan seront liées aux nouvelles ξ, η par les équations suivante

$$X = x + \xi \cos\theta - \eta \operatorname{sen}\theta, \quad Y = y + \xi \operatorname{sen}\theta + \eta \cos\theta. \tag{4}$$

Par suite l'équation de la courbe donnée rapportée aux nouveaux axes est

$$f(x + \xi \cos\theta - \eta \operatorname{sen}\theta, \quad y + \xi \operatorname{sen}\theta + \eta \cos\theta) = 0; \tag{5}$$

développons le premier membre à l'aide de la formule de Taylor, en prénant le binômes

$$h = \xi \cos\theta - \eta \sin\theta, \quad k = \xi \sin\theta + \eta \cos\theta$$

comme accroissements des indéterminées x, y. Nous obtiendrons:

$$f(x, y) + \frac{1}{1!}\left(h\frac{df}{dx} + k\frac{df}{dy}\right) + \frac{1}{2!}\left(h^2\frac{d^2f}{dx^2} + 2hk\frac{df^2}{dx\,dy} + k^2\frac{d^2f}{dy^2}\right) + \ldots = 0. \tag{6}$$

Or $f(x, y)$ est toujours égal à zero, car le point Ω appartient à la courbe (3).

Pour poursuivre le calcul nous supposerons avant tout que Ω soit un point simple, c'est-à-dire que une au moins des dérivées $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$ soit différente de zéro. Dans ces hypothèses on a :

$$h\frac{df}{dx}+k\frac{df}{dx}=(\xi\cos\theta-\eta\sin\theta)\frac{df}{dx}+(\xi\sin\theta+\eta\cos\theta)\frac{df}{dy}=$$

$$=\xi\left(\frac{df}{dx}\cos\theta+\frac{df}{dy}\sin\theta\right)+\eta\left(-\frac{df}{dx}\sin\theta+\frac{df}{dy}\cos\theta\right)$$

Mais, θ étant l'angle que la tangente en Ω à la courbe fait avec l'axe Ox, on a

$$\frac{df}{dx}\cos\theta+\frac{df}{dy}\sin\theta=0, \tag{7}$$

et par suite

$$-\frac{df}{dx}\sin\theta+\frac{df}{dy}\cos\theta=\left\{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{df}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

D'ailleurs

$$h^2\frac{d^2f}{dx^2}+2hk\frac{d^2f}{dx\,dy}+k^2\frac{d^2f}{dy^2}=(\xi\cos\theta-\eta\sin\theta)^2\frac{d^2f}{dx^2}$$

$$+2(\xi\cos\theta-\eta\sin\theta)(\xi\sin\theta+\eta\cos\theta)\frac{d^2f}{dy^2}+(\xi\sin\theta+\eta\cos\theta)^2\frac{d^2f}{dy^2};$$

donc le coéfficient de ξ^2 dans l'équation (5) vaut

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\cos^2\theta + 2\,\frac{d^2f}{dx\,dy}\cos\theta\sin\theta + \frac{d^2f}{dy^2}\sin^2\theta\right)$$

ou bien, à cause de l'équation (7),

$$\frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{d^2f}{dx^2}\left(\dfrac{df}{dy}\right)^2 - 2\,\dfrac{d^2f}{dx\,dy}\left(\dfrac{df}{dy}\right)\left(\dfrac{df}{dx}\right) + \dfrac{d^2f}{dy^2}\left(\dfrac{df}{dx}\right)^2}{\left(\dfrac{df}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{df}{dy}\right)^2}.$$

Par conséquence, lorsque ξ^2 et η sont des infiniment petits du même ordre, la (6) devient:

$$\eta\left\{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\,\frac{\xi^2}{2}\,\frac{\dfrac{d^2f}{dx^2}\left(\dfrac{df}{dy}\right)^2 - 2\,\dfrac{d^2f}{dx\,dy}\left(\dfrac{df}{dy}\right)\left(\dfrac{df}{dx}\right) + \dfrac{d^2f}{dy^2}\left(\dfrac{df}{dx}\right)^2}{\left(\dfrac{df}{dx}\right) + \left(\dfrac{df}{dy}\right)^2} = 0\,;$$

donc

$$\text{(8)}\qquad R = \lim\frac{\xi^2}{2\eta} = \frac{\left\{\left(\dfrac{df}{dy}\right)^2 + \left(\dfrac{df}{dy}\right)^2\right\}^{\frac{2}{3}}}{\begin{vmatrix} \dfrac{d^2f}{dx^2} & \dfrac{d^2f}{dx\,dy} & \dfrac{df}{dx} \\[2ex] \dfrac{d^2f}{dy\,dx} & \dfrac{d^2f}{dy^2} & \dfrac{df}{dy} \\[2ex] \dfrac{df}{dx} & \dfrac{df}{dy} & 0 \end{vmatrix}}$$

c'est l'expression bien connue du rayon de courbure dans un point ordinaire d'une ligne quelconque.

III

Cette conclusions n'est plus applicable lorsque Ω est un point double. Alors on a $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} = 0$, tandis que une au moins des secondes dérivees de la fonction f est différente de 0 au point Ω; dans ce cas l'angle θ est déterminé (de deux manières) par l'équation

$$\frac{d^2f}{dx^2}\cos^2\theta + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}\cos\theta\sin\theta + \frac{d^2f}{dy^2}\sin^2\theta = 0, \tag{9}$$

et l'équation (6) devient

$$\frac{1}{2!}\left\{\frac{d^2f}{dx^2}h^2 + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}hk + \frac{d^2f}{dy^2}k^2\right\} + \tag{6'}$$

$$+\frac{1}{3!}\left\{\frac{d^3f}{dx^3}h^3 + 3\frac{d^3f}{dx^2\,dy}h^2k + 3\frac{d^3f}{dx\,dy^2}hk^2 +\right.$$

$$\left.+\frac{d^3f}{dx^3}k^3\right\} + \ldots = 0.$$

Or si on suppose que ξ, η soient des infiniment petits tels que ξ^2 et η soint du même ordre, en réjétant de cette équation tous les termes qui sont infiniment petits par rapport aux autres, on

trouve :

$$\xi\eta \left\{ -\frac{d^2f}{dx^2}\cos\theta\sin\theta + \frac{d^2f}{dy^2}\cos\theta\sin\theta + \frac{d^2f}{dx\,dy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \right\} +$$

$$\frac{\xi^3}{3!}\left\{ \frac{d^3f}{dx^3}\cos^3\theta + 3\,\frac{d^3f}{dx^2\,dy}\cos^2\theta\sin\theta + 3\,\frac{d^3f}{dx\,dy^2}\cos\theta\sin^2\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{d^3f}{dy^3}\sin^3\theta \right\} = 0$$

et par suite

$$(10) \qquad R = \lim\frac{\xi^2}{2\eta} =$$

$$-\frac{3}{2}\,\frac{\left(\dfrac{d^2f}{dy^2} - \dfrac{d^2f}{dx^2}\right)\sin 2\theta + 2\,\dfrac{d^2f}{dx\,dy}\cos 2\theta}{\dfrac{d^3f}{2x^3}\cos^3\theta + 3\,\dfrac{d^3f}{dx^2\,dy}\cos^2\theta\sin\theta + 3\,\dfrac{d^3f}{dx\,dy^2}\cos\theta\sin^2\theta + \dfrac{d^3f}{dy^3}\sin^3\theta}$$

Si dans cette équation on substitue pour θ l'une ou l'autre des valeurs données par l'équation (9), on trouve les expressions des rayons des cercles osculateurs aux deux branches de la courbe qui passent par Ω.

Pour déterminer les rayons de courbure dans un point double d'une courbe spéciale donnée on peut appliquer l'équation (9) (10) en particularisant la fonction f; mais, en général, il vaut mieux de reprendre *ex-novo* le calcul, en introduisant dès le début l'expression corréspondante de cette fonction ; cela ressortira clairement des exemples que nous allons développer :

1.) Considérons la *conchoïde de* Sluse (voir mon ouvrage cité plus haut, p. 71) ayant pour équation

$$a(x-a)(x^2+y^2) + k^2x^2 = 0, \quad k > a.$$

L'origine en est un point double et les tangentes correspondentes ont pour équations :

$$\frac{y}{x} = \pm \frac{\sqrt{k^2 - a^2}}{a}$$

on a donc :

$$\cos = \frac{a}{k}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{k^2 - a^2}}{a},$$

et, au lieu des formules de transformation (4), on a les suivantes :

$$x = \frac{1}{k}\left(a\xi - \eta\sqrt{k^2 - a^2}\right), \quad y = \frac{1}{k}\left(\xi\sqrt{k^2 - a^2} + a\eta\right).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de la courbe donnée on trouve

$$\frac{a}{k}\left(a\xi - \eta\sqrt{k^2 - a^2} - ak\right)(\xi^2 + \eta^2) + \left(a\xi - \eta\sqrt{k^2 - a^2}\right)^2 = 0$$

que nous réduirons à ses termes principaux, comme il suit :

$$\frac{a^2}{k}\xi^3 - 2a\sqrt{k^2 - a^2}\xi\eta = 0.$$

Nous avons donc pour toutes les deux branches de la courbe considérée

$$R = \lim \frac{\xi^2}{2\eta} = \frac{k\sqrt{k^2 - a^2}}{a},$$

expression qu'on peut construire de la manière suivante : soit

ABH un triangle rectangle en H, dans lequel $AB = k$, $BH = a$; la perpendiculaire menée par A à AB coupe BH en C ; on voit facilement que $AC = R$.

2.) Le même procédé appliqué à *la trisectrice de* MACLAURIN (ouvrage cité, p. 75) ayant pour équation

$$x(x^2 + y^2) + a(3x^2 - y^2)$$

donne

$$R = 2a\sqrt{3}$$

comme expression de la courbure en O des deux branches de la courbe s'entre croisant dans l'origine ; R est donc le hauteur d'un triangle équilateral dont $4a$ est le côté.

3.) Pour donner un exemple ou les deux branches qu'on considère n'ont pas la même courbure, considérons *l'ophiuride* (ouv. cité, p. 48) représentée par l'équation

$$x(x^2 + y^2) - y(ax - cy) = 0.$$

L'origine en est un point double et les tangentes correspondentes ont pour équations

$$y = 0, \quad ax - cy = 0.$$

La première tangente est donc l'axe Ox et la courbure en O de la branche correspondante se tire de l'équation de la courbe en supposant x^2 et y des infinement petits du même ordre : on trouve de la sorte :

$$R = \lim. \frac{x^2}{2y} = \frac{a}{2}.$$

Pour déterminer la courbure de l'autre branche nous poserons

$x = \dfrac{c\xi - a\eta}{\sqrt{a^2+c^2}}$, $y = \dfrac{a\xi + c\eta}{\sqrt{a^2+c^2}}$ et nous en déduirons

$$2R = \lim \frac{\xi^2}{\eta} = \frac{c\sqrt{a^2+c^2}}{a},$$

expression qu'il est aisé de construire par une méthode analogue de celle employée plus haut pour la conchoïde de SLUSE.

4.) On trouve de la même manière que les deux branches de *la conchoïde de* NICOMEDE.

$$(x^2+y^2)(x-a)^2 - l^2x^2 = 0, \qquad l > a,$$

se coupant à l'origine ont là pour diamètre de courbure $\dfrac{\sqrt{l^2-a^2}}{a}$; tandis que pour *le limaçon de* PASCAL

$$(x^2+y^2-2ax)^2 - l^2(x^2+y^2) = 0, \qquad l < 2a$$

le diamètre de courbure à l'origine est $= \sqrt{4a^2-l^2}$. Cette expréssion et la précédente sont susceptibles de construction géométriques bien simples, que le lecteur trouvera sans peine.

IV

La raisonnement et les formules exposés au début de l'article précédent cessent à leur tour d'être applicables lorsque au point considéré s'annullent aussi les dérivées du second ordre. Pour résoudre dans ce cas la question qui nous occupe, supposons pour plus de généralité qu'au point Ω soient égales à O la fonction f et toutes ses dérivées jusque à l'ordre $m-1$, mais que au moins

une des dérivées de l'ordre m soit différente de 0. Alors l'équation (6) devient

$$(6'') \qquad \frac{1}{m!}\sum_{r=0}^{r=m}\frac{d^m f(x,y)}{dx^{m-r}\,dy^r}\binom{m}{r}h^{m-r}k^r +$$

$$+\frac{1}{(m+1)!}\sum_{r=m}^{r=m+1}\frac{d^{m+1}f(x,y)}{dx^{m+1-r}\,dy^r}\binom{m+1}{r}h^{m+1-r}k^r+\ldots=0$$

et l'angle θ dont h et k sont des fonctions est déterminé (de m manières) par l'équation suivante :

$$(11) \qquad \sum_{r=0}^{r=m}\frac{d^m f(x,y)}{dx^{m-r}\,dy^r}\binom{m}{r}\cos^{m-r}\theta.\sin^r\theta^r=0.$$

Cela prouve qu'en développant dans la (6″) les puissances indiquées de h, k, le coefficient de ξ^m est identiquement nul ; ξ^2 et η étant maintenant des infiniment petits du même ordre, la dite équation, réduite à ses termes principaux, devient :

$$\frac{\xi^{m-1}\eta}{m!}\sum_{r=0}^{r=m}\frac{d^m f(x,y)}{dx^{m-r}\,dy^r}\binom{m}{r}\{r\cos^{m-r+1}\theta\sin^{r-1}\theta -$$

$$-(m-r)\cos^{m-r-1}\theta\sin^{r+1}\theta\,\}+$$

$$\frac{\xi^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{r=0}^{r=m+1}\frac{d^{m+1}f(x,y)}{dx^{m+1-r}\,dy^r}\cos^{m+1-r}\theta\sin^r\theta=0.$$

On en tire

$$(12) \qquad R = \lim \frac{\xi^2}{2\eta} =$$

$$-\frac{m+1}{2}\,\frac{\displaystyle\sum_{r=0}^{r=m} \frac{d^m f(x,y)}{dx^{m-r}.dy^r}\binom{m}{r}\left\{r\cos^{m-r+1}\theta\sin^{r-1}\theta-(m-r)\cos^{m-r-1}\theta\sin^{r+1}\theta\right\}}{\displaystyle\sum_{r=0}^{r=m+1}\frac{d^{m+1}f(x,y)}{dx^{m+1-r}dy^r}\binom{m+1}{r}\cos^{m+1-r}\theta\sin^r\theta}$$

Si dans cette équation on substitue au lieu de $tg\,\theta$ les m valeurs données par l'équation (11) on parvient aux valeurs des rayons de courbure au point (x, y) des m branches de la courbe $f(x, y)=0$ qui passent par ce point.

Appliquons ce procédé à *la rosace algébrique* (comp. ouv. cité, p. 299 et suiv.) ayant pour équation polaire

$$\rho = l \sin\left(\frac{a}{l}\,\omega\right)$$

a et b étant des nombres entiers positifs que, pour fixer les idées, nous supposerons d'abord, tous les deux impairs. C'est une courbe de l'ordre $a+b$, dont l'équation cartésienne est:

$$l^b\left[\binom{a}{1}x^{a-1}y-\binom{a}{3}x^{a-3}y+\ldots\right]=$$

$$=\binom{b}{1}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{a+1}{2}}\left(l^2-\overline{x^2+y^2}\right)^{\frac{b-1}{2}}-$$

$$-\binom{b}{3}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{a+3}{2}}\left(l^2-\overline{x^2+y^2}\right)^{\frac{b-3}{2}}+\ldots\Big].$$

L'origine est un point a-tiple de la courbe et toutes ses bran-

ches qui passent par 0 ont là la même courbure; pour la trouver remarquons qu'une de ses branches est tangente à l'axe Ox; il suffit donc de supposer que x^2 et y soient des infiniment petits du même ordre; l'équation précédente se réduit dans cette hypothèse à

$$l^b.\, ax^{a-1}\, y = b.\, l^{b-1}\, x^{a+1}$$

et donne

$$2R = \lim \frac{x^2}{y} = \frac{a}{b}\, l.$$

Nous laissons au lecteur de prouver que cette expression est encore applicable lorsque un des nombres positifs a et b est pair. Si p. ex. il s'agit de la rosace à quatre branches $\rho = l \sin 2\omega$, on a tout-simplement $R = l$.

Gênes, 24 Décembre 1905.

ON THE INTEGRAL $\int_0^{2\pi} \cot \frac{1}{2} (x - a - ib)\, dx$

BY

TSURUICHI HAYASHI

Professor in the Normal Superior School of Tokyo (Japan)

In his interesting memoir published in the *Archiv der Mathematik und Physik*, III[te] Reihe, 9. Bd,, p. 30-33, 1905, Prof. F. GOMES TEIXEIRA has shown us an elegant proof of the formula

$$\int_0^{2\pi} \cot \frac{1}{2} (x - a - ib)\, dx = 2\,(b)\, i\pi\,,$$

where (b) represents a quantity equal to unity in its absolute value and having the same sign as b.

This important formula has been proved by C. HERMITE in his *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, 1[e] partie, p. 343-344, 1873, by using geometrical figures, and thereafter it has been proved by Prof. F. GOMES TEIXEIRA in the *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2[e] série, t. VII, p. 220, 1868; and so his proof in the *Archiv d. Math. u. Physik* above mentioned is his second one.

In the present note, we will find another proof that is very elementary.

Now

$$\cot\frac{1}{2}(x-a-ib)=\frac{\cos\frac{1}{2}(x-a-ib)}{\sin\frac{1}{2}(x-a-ib)}$$

$$=\frac{\cos X\cosh\frac{b}{2}+i\sin X\sinh\frac{b}{2}}{\sin X\cosh\frac{b}{2}-i\cos X\sinh\frac{b}{2}},$$

where

$$X=\frac{1}{2}(x-a),$$

$$\cosh\frac{b}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{b}{2}}+e^{-\frac{b}{2}}\right),$$

$$\sinh\frac{b}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{b}{2}}-e^{-\frac{b}{2}}\right).$$

Therefore, by realizing the denonimator,

$$\cot\frac{1}{2}(x-a-ib)=\frac{\sin X\cos X+i\sinh\frac{b}{2}\cosh\frac{b}{2}}{\sin^2 X\cosh^2\frac{b}{2}+\cos^2 X\sinh^2\frac{b}{2}},$$

Firstly,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin X\cos X\,dx}{\sin^2 X\cosh^2\frac{b}{2}+\cos^2 X\sinh^2\frac{b}{2}}=-\int_0^{2\pi}\frac{d\cos^2 X}{dx}\cdot\frac{dx}{\cosh^2\frac{b}{2}-\cos^2 X}$$

$$=\left|\log\left\{\cosh^2\frac{b}{2}-\cos^2 X\right\}\right|_0^{2\pi}=0.$$

Secondly,

$$\int \frac{\sinh\frac{b}{2}\cosh\frac{b}{2}\,dx}{\sin^2 X\cosh^2\frac{b}{2}+\cos^2 X\sinh^2\frac{b}{2}} = \int \frac{\operatorname{tangh}\frac{b}{2}\sec^2 X\,dx}{\operatorname{tangh}^2\frac{b}{2}+\tan^2 X}$$

$$= 2\int \frac{\tanh\frac{b}{2}\,dz}{\tanh^2\frac{b}{2}+z^2},$$

where

$$z = \operatorname{tang} X.$$

When x increases from 0 to 2π, X increases from $-\frac{a}{2}$ to $\pi - \frac{a}{2}$, and therefore, if we put $\operatorname{tang}\left(-\frac{a}{2}\right) = \alpha$, tang X, i. e. z increases from α to $+\infty$ and then from $-\infty$ to α.

Therefore

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sinh\frac{b}{2}\cosh\frac{b}{2}\,dx}{\sin^2 X\cosh^2\frac{b}{2}+\cos^2 X\sinh^2\frac{b}{2}} = 2\int_\alpha^{+\infty} F(z)\,dz + 2\int_{-\infty}^{\alpha} F(z)\,dz$$

$$= 2\int_0^{+\infty} F(z)\,dz + 2\int_{-\infty}^{0} F(z)\,dz$$

$$= 4\int_0^{+\infty} F(z)\,dz,$$

where

$$F(z) = \frac{\tanh\frac{b}{2}}{\tanh^2\frac{b}{2}+z^2}.$$

Therefore this last integral is equal to

$$\left| 4\tan^{-1}\frac{z}{\tanh\frac{b}{2}} \right|_{0}^{+\infty},$$

i. e. $+2\pi$ or -2π according as $\tanh\frac{b}{2}>0$ or <0.

Now

$$\tanh\frac{b}{2}, \quad \text{i. e.} \quad \frac{e^{\frac{b}{2}}-e^{-\frac{b}{2}}}{e^{\frac{b}{2}}+e^{-\frac{b}{2}}}>0 \text{ or } <0,$$

according as $e^{\frac{b}{2}}-e^{-\frac{b}{2}}>0$ or <0,

i. e. according as $e^{b}-1>0$ or <0,

i. e. according as $e^{b}>1$ or <1

i. e. according as $b>0$ or <0.

Therefore

$$\int_{0}^{2\pi}\cot\frac{1}{2}(x-a-ib)\,dx=+2i\pi \text{ or } -2i\pi$$

according as $b>0$ or <0; that is,

$$\int_{0}^{2\pi}\cot\frac{1}{2}(x-a-ib)\,dx=2\,(b)\,i\pi\,.$$

August 12, 1906, The Tokyo Koto Shihan Gakko, Tokyo, Japan.

SOBRE OS HYPERBOLISMOS DAS CONICAS

POR

F. GOMES TEIXEIRA

I

Quando as coordenadas (x, y) e (Y, X) de dous pontos correspondentes de duas curvas $f(x, y) = 0$ e $F(X, Y)$ estão ligadas pelas relações

$$(1) \qquad X = x, \quad Y = \frac{xy}{a},$$

a primeira diz-se um *hyperbolismo* da segunda [1]. Esta designação foi introduzida por NEWTON na sua *Enumeratio linearum tertii ordinis*, consagrada á classificação das cubicas. N'esta obra admiravel reduz o grande geometra a equação das cubicas a quatro formas normaes, uma das quaes é

$$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

[1] Veja-se no nosso *Tratado de las curvas especiales notables* (Madrid, 1905, pagg. 61-62) a construcção pela qual, de cada ponto e tangente de uma curva, se deduz o ponto e a tangente correspondente do seu hyperbolismo. Podem ver-se na mesma obra applicações d'esta construcção á *anguinea* (pag. 61), ao *folium* de DESCARTES (pag. 72), á cubica d'AGNESI (pag. 68), á quartica pyriforme (pag. 215), etc.

referida a eixos de direcção qualquer; e depois divide as cubicas representadas por esta equação em quatro classes, correspondendo a primeira ao caso de ser $a > 0$, a segunda ao caso de ser $a < 0$, a terceira ao caso de ser $a = 0$ e b differente de zero e a ultima ao caso de ser $a = 0$ e $b = 0$. Ás curvas que formam esta ultima classe, representadas pois pela equação

$$xy^2 + ey = cx + d,$$

deu Newton o nome de *hyperbolismos das conicas*, porque esta equação resulta da seguinte:

$$Y^2 + eY = cX^2 + dX,$$

que representa uma conica, por meio da transformação (1), pondo $\alpha = 1$; e dividiu depois esta classe de cubicas em tres generos, formando o primeiro com as que correspondem a $c < 0$, o segundo com as que correspondem a $c > 0$ e o terceiro com as que correspondem a $c = 0$. Como no primeiro caso a ultima equação representa uma *ellipse*, no segundo uma *hyperbole* e no terceiro uma *parabola*, chamou ás curvas dos tres generos, respectivamente, *hyperbolismos ellipticos*, *hyperbolicos* e *parabolicos*.

É evidente que cada curva tem uma infinidade de hyperbolismos differentes e que, reciprocamente, a cada curva corresponde uma infinidade de outras curvas de que ella é um hyperbolismo, visto que a transformação (1) depende de α e dos eixos das coordenadas, que podem ter posições arbitrarias.

Posto isto, vamos, no presente trabalho, examinar os hyperbolismos das conicas, e mostrar que *toda a curva que é um hyperbolismo de uma ellipse é tambem um hyperbolismo de um circulo, que determinaremos, e que toda a curva que é um hyperbolismo de uma hyperbole não equilatera é tambem um hyperbolismo d'outra hyperbole equilatera*. Este theorema não foi ainda notado, segundo creio.

Consideremos uma conica qualquer e supponhamos que a sua equação, referida a eixos que formem um angulo ω e que se

cortem em um ponto da curva, é

$$Y^2 + BXY + CX^2 + DY + EX = 0 .$$

Applicando a esta equação a transformação (1), obtem-se a seguinte:

$$xy^2 + B\alpha xy + C\alpha^2 x + D\alpha y + E\alpha^2 = 0 ,$$

ou, mudando a origem das coordenadas para o ponto $\left(0, -\frac{B\alpha}{2}\right)$,

$$(2) \qquad xy^2 + Ky + Hx + L = 0 ,$$

onde

$$(3) \qquad K = D\alpha, \quad H = -\frac{\alpha^2}{4}(B^2 - 4C), \quad L = \frac{\alpha^2}{2}(2E - BD) ,$$

que representa pois as cubicas que são os *hyperbolismos da conica* representada pela equação dada, relativamente aos eixos a que a conica está referida e á recta $X = \alpha$.

Quando os eixos a que está referida a conica dada são parallelos a dois diametros conjugados, no caso de esta conica ter centro, ou a um diametro e á tangente na sua extremidade, no caso de parabola, temos $B = 0$, e a equação que vem de se obter toma a forma.

$$xy^2 + C\alpha^2 x + D\alpha y + E\alpha^2 = 0 ,$$

e coincide portanto com a equação considerada por Newton.

Supponhamos agora que é dada a equação (2) e que queremos procurar as conicas de que a cubica que ella representa são os hyperbolismos, referidos a eixos que passem por um dos seus pontos. Temos, n'este caso, de recorrer ás equações (3), onde K, H e L são quantidades dadas, as quaes determinam tres das quantidades α, B, C, D e E, ficando as outras duas arbitrarias.

Vejamos agora se existe um circulo que satisfaça a este problema.

Consideremos, para isso, o circulo representado pela equação

seguinte, referido a dois eixos que façam um com o outro um angulo :

$$X^2+Y^2+2XY\cos\omega-2(x_1+y_1\cos\omega)X-2(y_1+x_1\cos\omega)Y=0,$$

o qual passa pela origem das coordenadas e tem para centro o ponto (x_1, y_1). Temos n'este caso, pondo em (3)

$$A=1,\quad C=1,\quad B=2\cos\omega,$$
$$D=-2(y_1+x_1\cos\omega),\quad E=-2(x_1+y_1\cos\omega),$$

as equações seguintes:

$$K=-2(y_1+x_1\cos\omega)\alpha,$$
$$H=\alpha^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega,\quad L=-2\alpha^2x_1\,\mathrm{sen}^2\,\omega,$$

que determinam as quantidades α, x_1 e y_1, quando as constantes K, H e L são dadas. Aos valores de α assim obtidos corresponde um circulo do qual a cubica (2) é um hyperbolismo, o qual é real quando H é positivo, isto é, quando a conica é uma ellipse, e imaginario quando H é negativo, isto é, quando a conica é uma hyperbole.

Considerando do mesmo modo a *hyperbole equilatera* representada pela equação

$$Y^2+X^2\cos 2\omega+2XY\cos\omega$$
$$-2(y_1+x_1\cos\omega)Y-2(y_1\cos\omega+x_1\cos 2\omega)X=0,$$

obteem-se as equações

$$K=-2(y_1+x_1\cos\omega)\alpha,\quad H=-\alpha^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega$$
$$L=2\alpha^2x_1\,\mathrm{sen}^2\,\omega,$$

que determinam α, x_1 e y_1, quando K, H e L são dados, e que determinam pois uma hyperbole equilatera da qual a cubica (2) é um hyperbolismo, a qual é real, quando H é negativo.

II

Consideremos agora o caso em que a origem das coordenadas não está situada sobre a conica dada, e seja

$$Y^2 + BXY + CX^2 + DY + EX + F = 0$$

a equação d'esta conica. A equação dos seus hyperbolismos é

$$y^2 x^2 + B\alpha x^2 y + C\alpha^2 x^2 + D\alpha xy + E\alpha^2 x + F\alpha^2 = 0$$

ou, mudando a origem das coordenadas para o ponto $\left(0, -\frac{B\alpha}{2}\right)$,

$$(4) \qquad y^2 x^2 + Hx^2 + Kyx + Lx + F\alpha^2 = 0$$

onde

$$K = D\alpha$$

$$(5) \qquad H = -\frac{\alpha^2}{4}(B^2 - 4C), \quad L = \frac{\alpha^2}{2}(2E - BD).$$

A curva pedida é pois n'este caso uma *quartica*, e as equações (5) determinam tres das constantes B, C, D, E e α, quando as outras duas são dadas.

Vamos mostrar que ainda n'este caso a quartica considerada é o hyperbolismo de um circulo ou de uma hyperbole equilatera.

Consideremos o circulo representado pela equação

$$(X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 + 2(X - x_1)(Y - y_1)\cos\omega = R^2.$$

Temos n'este caso

$$A = 1, \quad B = 2\cos\omega, \quad C = 1, \quad D = -2(y_1 + x_1\cos\omega),$$

$$E = -2(x_1 + y_1\cos\omega), \quad F = x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 y_1\cos\omega - R^2,$$

e, como no caso anterior, as equações

$$R^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 y_1 \cos\omega - F,$$
$$H = \alpha^2 \operatorname{sen}^2\omega, \quad L = -2\alpha^2 x_1 \operatorname{sen}^2\omega,$$
$$K = -2(y_1 + x_1 \cos\omega)\alpha,$$

que determinam α, x_1, y_1 e R, quando as quatro constantes H, K, L e F são dadas, e ás quaes corresponde pois nm circulo do qual a quartica dada é um hyperbolismo. Este circulo é *real* quando H é positivo e

$$x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 y_1 \cos\omega - F > 0.$$

Mostra-se do mesmo modo que existe uma hyperbole equilatera da qual a quartica (4) é um hyperbolismo.

Convem notar aqui que não é condição necessaria para que uma conica tenha para hyperbolismo uma cubica, que a origem das coordenadas coincida com um ponto da conica. Assim, no caso de a equação da conica estar reduzida á forma

$$XY + CX^2 + DY + EX + F = 0,$$

o seu hyperbolismo tem para equação

$$x^2y + C\alpha x^2 + Dxy + E\alpha x + F\alpha = 0,$$

ou, mudando a origem das coordenadas para o ponto $\left(-\frac{D}{2}, -C\alpha\right)$,

$$x^2y + H_1x + K_1y + L_1 = 0,$$

onde H_1, K_1 e L_1 são quantidades cujos valores nos dispensamos de escrever.

Quando a equação da conica tem a forma

$$XY + DY + EX = 0,$$

o hyperbolismo correspondente é a conica representada pela equação

$$xy + D\alpha y + E\alpha x = 0 .$$

III

Chamaremos toda a curva que tem para hyperbolismo outra curva dada um *antihyperbolismo* da primeira. Para achar estes antihyperbolismos, basta pôr na equação $F(X, Y) = 0$ da curva dada

$$Y = \frac{\alpha y}{x}, \quad X = x .$$

Posto isto, supponhamos que a curva dada é a conica representada pela equação

$$AY^2 + BYX + CX^2 + DY + EX + F = 0 .$$

A equação dos seus antihyperbolismos é a seguinte:

$$A\alpha^2y^2 + B\alpha yx^2 + Cx^4 + D\alpha xy + Ex^3 + Fx^2 = 0,$$

que representa uma quartica quando A e C são differentes de zero, e uma cubica no caso contrario. A equação d'esta cubica é, quando $C = 0$, $A \gtrless 0$,

$$x^2(B\alpha y + Ex) + A\alpha^2y^2 + D\alpha xy + Fx^2 = 0,$$

e mostra que esta curva é unicursal, e que tem uma asymptota a distancia finita quando B é differente de zero. Quando porém temos $A = 0$, $C \gtrless 0$, a equação da cubica é

$$Cx^3 + B\alpha xy + D\alpha y + Ex^2 + Fx = 0,$$

e mostra que a cubica é ainda unicursal e tem uma asymptota a distancia finita, quando B é differente de zero. Mudando a ori-

gem das coordenadas para o ponto $\left(-\frac{D}{B}, 0\right)$, a equação d'esta curva toma ainda a forma

$$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

onde

$$a = -\frac{C}{B\alpha}, \quad b = \frac{3DC - BE}{B^2\alpha}, \quad c = \frac{2EBD - 3CD^2 - FB^2}{B^3\alpha};$$

$$d = \frac{CD^3 - ED^2B + FDB^2}{\alpha B^4},$$

e representa por isso um *tridente* (¹).

Quando é dada a equação precedence e se quer obter a conica de que ella é um antihyperbolismo, basta mudar a origem das coodenadas para o ponto $(h, 0)$, h representando uma raiz real da equação

$$ah^3 + bh^2 + ch + d = 0,$$

o que dá

$$xy = ax^3 + (3ah + b)x^2 + (3ah^2 + 2bh + c)x - hy,$$

e, pondo agora

$$y = XY, \quad x = X,$$

vem a equação da conica procurada

$$XY = aX^2 + (3ah + b)X - hY + 3ah^2 + 2bh + c.$$

(¹) Veja-se a theoria d'esta cubica no nosso *Tratado de las cubicas especiales notables* (pag. 63).

BIBLIOGRAPHIA

E. Coursat: *Cours d'Analyse mathématique*, t. II, Paris. Gauthier-Villars, 1905.

Deu-se já noticia do primeiro volume d'esta obra magistral no tomo XV do *Jornal de sciencias mathematicas*, onde nos referimos ao seu alto valor. As observações ahi feitas são applicaveis ao presente volume, consagrado á theoria das funcções analyticas, á theoria das equações differenciaes e ás derivadas parciaes e ao calculo das variações.

A theoria das funcções analyticas é tratada pelos methodos de Cauchy, e a esta theoria são consagrados cinco extensos capitulos, sendo no primeiro estudadas as funcções elementares de uma variavel complexa, no segundo a theoria dos integraes curvilineos e suas consequencias, no terceiro as funcções uniformes, no quarto o prolongamento analytico das funcções e no quinto as funcções analyticas de muitas variaveis. No segundo d'estes capitulos nota-se a bella demonstração do theorema fundamental da theoria dos integraes curvilineos, com que o eminente auctor d'esta obra alargou o campo de applicações d'este theorema celebre.

Á theoria das equações differenciaes e ás derivadas parciaes são consagrados tambem cinco capitulos, sendo no primeiro estudados os methodos elementares de integração das equações differenciaes, no segundo as condições para a existencia do integral, no terceiro as equações differenciaes lineares, no quarto as equações não lineares, no quinto as equações ás derivadas parciaes.

A doutrina considerada neste ultimo capitulo foi objecto de uma obra muito importante do mesmo auctor, cuja parte mais essencial foi resumida no presente tratado.

O ultimo capitulo da obra é consagrado ao calculo das variações, e, a este respeito, são expostos não só os trabalhos antigos de Euler, Lagrange, Legendre, Jacobi, etc., mas tambem os trabalhos de Weierstrass, e os que tiveram origem nas bellas indagações d'este eminente geometra.

G. T.

Francisco Luiz Pereira de Sousa: *Os Calcareos do districto de Leiria* (Extracto da *Revista de Engenheria militar*. Lisboa, Typ. do Commercio, 1906).

Apresenta o auctor neste trabalho os resultados dos seus estudos ácerca dos materiaes que lhe foi dado examinar nos terrenos comprehendidos no districto de Leiria, occupando-se com especial desenvolvimento dos seus importantissimos calcareos.

O livro abre por uma descripção geographica e geologica da região, seguida d'uma serie de informações ácerca dos principaes mineraes que nella se encontram. O interesse excepcional que o districto de Leiria offerece, quer sob o ponto de vista petrographico, quer sob o ponto de vista tectonico, é nestas primeiras paginas salientado com grande relevo.

Passa em seguida o auctor directamente ao estudo dos calcareos do districto, cuja classificação geologica, resumida num quadro synthetico (pag. 54), é desenvolvida e justificada nas paginas que precedem esse quadro.

Todo o resto do livro é dedicado ao estudo das pedreiras calcareas do districto, distribuidas por concelhos. A abundancia e nitidez das informações, relativas não só aos caracteres geologicos, mas ainda, e principalmente, áquelles de que depende a sua utilização pratica como materiaes de construcção, como são os preços actuaes por metro cubico, as obras mais importantes em que teem sido empregados, a sua resistencia ao esmagamento, etc., dão ao trabalho a que nos estamos referindo um grande valor, tanto para o geologo, como para o engenheiro ou constructor.

Uma carta do districto, com indicação das principaes pedreiras de calcareos, completa esta excellente monographia.

Os materiaes de construcção, que os nossos terrenos nos fornecem com tanta generosidade, estão ainda tão imperfeitamente conhecidos, que a apparição d'um trabalho, como o que acabamos de lêr, é digna do mais vivo apreço. Oxalá o exemplo fructifique e outros estudos do mesmo genero venham enriquecer a nossa escassa litteratura scientifica com subsidios do valor dos que se encontram na obra do sr. **Pereira de Sousa**.

S. P.

C. de Campo Bello.

Off. do Commercio do Porto

DR. ADRIANO DE PAIVA DE FARIA LEITE BRANDÃO

Conde de Campo-Bello

A morte do Dr. ADRIANO DE PAIVA, succedida no dia 30 de março ultimo, representa para o professorado português a perda d'um dos seus membros mais illustres. Para os seus collegas da Academia Polytechnica do Porto é essa perda particularmente dolorosa, pela recordação d'uma longa camaradagem, a que as qualidades pessoaes do extincto imprimiam o cunho d'uma affectuosa cordealidade.

O agrado da sua conversação, derivado d'uma vasta cultura intellectual, d'uma forma serena no dizer, e quantas vezes! d'uma ligeira e inoffensiva nota de ironia, não se apagará da memoria dos que tiveram ensejo de o ouvir.

Na cadeira de Physica, onde se conservou durante mais de 30 annos, e que regeu ainda até poucos mêses antes da morte, foi o Dr. ADRIANO DE PAIVA um professor erudito e claro, e um verdadeiro apaixonado pela sciencia que professava. Aquelles que de perto o conheceram nos ultimos annos da vida, sabem como, ao approximar dos 60 annos, parecia revigorar a curiosidade do seu espirito, acompanhando com interesse os progressos que nos ultimos tempos teem feito nas sciencias physicas uma profunda transformação.

O Dr. ADRIANO DE PAIVA deixa trabalhos interessantes, que o tornaram conhecido dentro e fóra do nosso paiz. Ainda bem recentemente o seu nome foi muitas vezes citado, a proposito

das experiencias de transmissão de photographias a distancia, realisadas pelo professor allemão Korn.

A Commissão de redacção dos *Annaes* da Academia Polytechnica, traduzindo o sentir dos membros do seu professorado, presta á memoria do Dr. Adriano de Paiva a homenagem da sua commovida saudade.

SUR LES POINTS FOCAUX
DANS LES SURFACES DU SECOND DEGRÉ

PAR

CL. SERVAIS

Professeur à l'Université de Gand

---

1. *Les plans des sections principales en un point variable* **M** *d'une quadrique* Σ, *determinent sur un axe de symétrie* **a** *de cette surface des couples de points en involution*.

Le trièdre trirectangle formé par la normale MN et les tangentes conjuguées rectangulaires MP et MQ est coupé par un plan de symétrie (ac) suivant le triangle NPQ conjugué à la conique focale de Σ située dans ce plan. L'orthocentre R de ce triangle est la projection de M sur le plan (ac). On désigne respectivement par S, T, U, V les points (a, NP), (a, NQ), (a, RQ) et la projection de P sur a. Lorsque M varie sur Σ, ces points décrivent sur l'axe a, les ponctuelles (S), (T), (V), (U). Les droites rectangulaires NP et RQ sont conjuguées par rapport aux coniques focale et principale du plan (ac), par suite les points S et U sont conjugués par rapport aux foyers communs à ces co-

---

[1] VALSON. *Applications de la théorie des coordonnées elliptiques à la géométrie de l'ellipsoïde.* Thése présentée à la faculté des sciences de Paris. 1854.

HERLERMANN. *Über die Focalpunkte der Flächen Fzweiten grades. Journal de Crelle*, t. LVI, 345-354.

SCHROETER. *Theorie der Oberflächen zweiter ordnung.* 665-691.

niques et les ponctuelles (S) et (U) sont involutives. Le pôle W de la droite PN par rapport à la conique principale est situé sur la droite QR conjuguée de PN; R est d'ailleurs le pôle de PQ relativement à la même conique. Les points R, W, U étant en ligne droite, leurs polaires sont concourantes; ainsi la droite PV est la polaire du point U relativement à la conique principale et les ponctuelles (U) et (V) sont involutives. Les points N, Q, T étant en ligne droite, leurs polaires relatives à la conique focale sont concourantes, par suite la droite PV est la polaire du point T par rapport à cette courbe et les ponctuelles (T) et (V) sont involutives. On conclut de là que les ponctuelles (S) et (T) sont projectives; la nature de la correspondance entre les points S et T prouve qu'elles sont involutives. Leurs éléments doubles sont les *points focaux* de la quadrique Σ sur l'axe de symétrie *a*.

2. Les coniques principale et focale du plan de symétrie (*ac*) ont deux cordes communes, f et f_1, réelles ou imaginaires conjuguées normales à l'axe *a*. Soient H le point *af*, E et F les pôles de la corde f relativement aux deux coniques. Les couples de points F et E, E et H, H et F sont conjugués respective-dans les formes involutives (S) et (U), (U) et (V), (V) et (T) par suite F est un élément double des ponctuelles involutives (S) et (T). Ainsi: *Les points focaux* F *et* F′ *sur l'axe* a, *sont les pôles des cordes* f *et* f′ *par rapport à la conique focale correspondante.*

La corde f coupe la conique principale en deux points M_1 et M_2, qui sont des ombilics de la quadrique Σ; la droite FM_1 étant la normale au point M_1 à la surface on voit que: *Les normales aux ombilics de la quadrique* Σ, *situés dans un plan de symétrie* (ac) *déterminent sur les axes* a *et* c *les points focaux de* Σ.

3. Dans les développements qui suivent on convient de désigner par la notation (*ac*) le plan de symétrie de Σ normal aux plans des sections circulaires réelles de cette surface. Dans le cas d'une quadrique à centre, le plan (*ac*) contient quatre ombilics de la surface, designés par M_1, M_2, M_3, M_4; ils sont tous réels pour l'ellipsoïde et l'hyperboloïde à deux nappes; imaginaires conjugués deux à deux pour l'hyperboloïde à une nappe; mais les diamètres $M_1 M_3$ et $M_2 M_4$ sont toujours réels car ils sont conjugués aux plans des sections circulaires réelles. Les droites $M_1 M_2$ et $M_3 M_4$, $M_1 M_4$ et $M_2 M_3$ sont donc simultané men

reélles, ou imaginaires conjuguées; il en sera de même de leurs pôles relativement à la conique focale, qui sont les points focaux de Σ, sur les axes a et c (2). Donc: *Les points focaux sur les axes* a *et* c *du plan de symétrie* (ac) *normal aux sections circulaires réelles, sont réels pour l'ellipsoïde et l'hyperboloïde à deux nappes; imaginaires conjugués pour l'hyperboloïde à une nappe.*

Dans le plan de symétrie (ab) les ombilics M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 sont imaginaires conjugués deux à deux, les diamètres $M'_1 M'_3$ et $M'_2 M'_4$ étant imaginaires, deux droites $M'_1 M'_2$ et $M'_3 M'_4$ sont réelles et les deux autres $M'_1 M'_4$, $M'_2 M'_3$ sont imaginaires conjuguées; par conséquent sur l'un des axes a, b les points focaux sont réels, sur l'autre ils sont imaginaires conjugués. Ainsi: *Sur l'axe* b *parallèle aux sections circulaires réelles les points focaux sont imaginaires conjugués pour l'ellipsoïde et l'hyperboloïde à deux nappes; ils sont réels pour l'hyperboloïde à une nappe.*

4. Dans le cas d'un paraboloïde elliptique ou hyperbolique les coniques focale et principale d'un plan de symétrie ont une corde commune à distance finie, réelle ou idéale, normale à l'axe a, et une tangente commune à l'infini. *Un paraboloïde a donc deux points focaux reéls dont l'un est à l'infini.*

5. Si la surface Σ a un centre O, les formes involutives (S) et (U), (U) et (V), (V) et (T) donnent successivement:

$$OS.OU = P_a - P_c \quad OU.OV = P_a, \quad OV.OT = P_a - P_b$$

P_a, P_b, P_c étant les puissances des involutions de points conjugués sur les axes a, b, c de Σ, par conséquent:

$$OS.OT = (P_a - P_b)(P_a - P_c) : P_a$$

formule qui donne la puissance de l'involution des points S et T (1) sur l'axe a. Si les points focaux F sur l'axe a sont réels on a:

$$\overline{OF}^2 = (P_a - P_b)(P_a - P_c) : P_a.$$

6. Si la surface Σ est un paraboloïde, on désigne par F_1 et F_2 les foyers des paraboles principales dans les plans de sy-

métrie (ac) et (ab), les formes involutives (S) et (U), (U) et (V), (V) et (T) donnent successivement:

$$SF_1 = F_1U, \quad UA = AV, \quad VF_2 = F_2T;$$

A est le sommet de Σ, par suite:

$$AS + AT = 2(AF_1 + AF_2).$$

Si F_3 est le milieu du segment F_1F_2 le point focal F à distance finie est le symétrique de A par rapport à F_3.

7. Par une génératrice isotrope g de Σ passe un plan isotrope γ tangent à Σ et à toute quadrique Σ_1 homofocale à Σ. Les points de contact G, G_1, G_2 du plan γ avec les surfaces Σ, Σ_1 et le cercle imaginaire à l'infini sont en ligne droite, car ce sont les pôles du plan γ par rapport à trois quadriques d'un faisceau tangentiel. Les points G et G_2 sont situés sur la droite g; il en est donc de même du point G_1 qui est ainsi commun à Σ et Σ_1 et appartient à la courbe $(\Sigma\Sigma_1)$. Le plan tangent en G_1 à Σ contient la génératrice g; le plan γ tangent en G_1 à Σ passe par g, par suite celle-ci doit être la tangente en G_1 à la courbe $(\Sigma\Sigma_1)$. Ainsi: *Toute ligne de courbure de la quadrique Σ est tangente aux génératrices isotropes de cette surface* [1].

8. Le point à l'infini de la direction principale c est un sommet du tétraèdre conjugué à Σ et Σ_1, le cylindre projetant la courbe $(\Sigma\Sigma_1)$ parallèlement à la direction principale c est donc du second degré. Le plan projetant une génératrice isotrope g parallèlement à c contient la génératrice g' symétrique de g relativement au plan de symétrie (ab). Il est donc coupé par un plan de section circulaire réelle ou par un plan directeur de Σ suivant une droite isotrope. Par suite (7): *Les cylindres projetant les lignes de courbure d'une quadrique Σ parallèlement à la direction principale* c *sont coupés par un plan σ de section circulaire réelle, ou par un plan directeur σ, suivant des coniques (σ) homofocales. Les foyers communs sont les projections des ombilics de la surface Σ, faites parallèlement à la direction* c [2].

---

(1) Roberts. *Liouville*, t. XV, p. 289.
(2) Salmon. *Surfaces du second degré*, p. 238.

9. Si la surface est un ellipsoïde ou un hyperboloïde à deux nappes. les ombilics M_1, M_2, M_3, M_4 (3) sont reéls; on prend pour plan σ le plan tangent au point M_1. Ce point est un foyer de la courbe (σ), l'axe focal est la tangente en M_1 à la conique principale (S) de Σ dans le plan de symétrie (ac); on désigne par E et E_1 les points où il coupe les axes a et c; E_1 est le centre de la conique (σ). Un sommet A_1 de (σ) sur EE_1, appartient à une corde commune aux coniques principales (S) et (S_1) des quadriques Σ et Σ_1 dans le plan (ac), normale à l'axe a au point A. Les pôles A_2 et A_3 de cette corde AA_1 relativement aux coniques (S) et (S_1), sont conjugués par rapport à leurs foyers communs, par suite:

$$OA.OA_2 = P_a \quad OA.OA_3 = P_{a_1}, \quad OA_2.OA_3 = P_a - P_c$$

P_{a_1} désigne la puissance de l'involution des points conjugués par rapport à Σ_1 sur l'axe a. On tire de ces égalités:

$$\overline{OA}^2 = P_a . P_{a_1} : (P_a - P_c) .$$

La trace F sur l'axe a de la normale à Σ au point M_1 est un point focal de Σ, et les points F et E sont conjugués par rapport aux foyers de (S) on a donc:

$$\overline{OF}^2 = (P_a - P_b)(P_a - P_c) : P_a ; \quad OE.OF = P_a - P_c .$$

On déduit de ces égalités la valeur de OE et par analogie celle de OE_1:

$$\overline{OE}^2 = P_a (P_a - P_c) : (P_a - P_b) ; \quad \overline{OE_1}^2 = P_c (P_c - P_a) : (P_c - P_b)$$

et par suite:

$$\overline{EE_1}^2 = P_b (P_a - P_c)^2 : (P_a - P_b)(P_b - P_c) .$$

donc:

$$E_1 A_1 = \sqrt{P_{a_1} . P_b} : \sqrt{P_b - P_c} .$$

formule qui donne la longueur du demi-grand axe de la conique (σ)

Le point F étant le pôle de $M_1 M_2$ par rapport à la conique focale (2) on a, en désignant par H le point $(a, M_1 M_2)$:

$$OF.OH = P_a - P_b.$$

Mais:

$$E_1 M_1 : E_1 A_1 = OH : OA = OH.OF : OA.OF$$

par conséquent:

$$E_1 M_1 : E_1 A_1 = \sqrt{P_a - P_b} : \sqrt{P_{a_1}}$$

formule qui donne l'excentricité de la conique (σ).

10. Si la surface est un hyperboloïde à une nappe, le plan σ, supposé parallèle à l'axe b (3) est mené par cet axe. Les foyers réels de la conique (σ) sont situés sur b car les points focaux F de Σ sont réels sur b (3) et leurs polaires f relativement à la conique focale du plan bc sont les projetantes des ombilics, parallèles à c. Ces foyers sont les points $P \equiv (bf)$ et on a

$$OF.OP = P_b - P_a \qquad \overline{OF}^2 = (P_b - P_a)(P_b - P_c) : P_b$$

d'ou

$$\overline{OP}^2 = P_b (P_b - P_a) : (P_b - P_c).$$

Un sommet de la conique (σ) sur b est le pied A d'une corde commune aux coniques principales de Σ et Σ_1 dans le plan (bc); si A_1 et A_2 sont les pôles de cette corde relativement à ces courbes, on a:

$$OA.OA_1 = P_b, \quad OA.OA_2 = P_{b_1}, \quad OA_2.OA_1 = P_b - P_c$$

$$\overline{OA}^2 = P_b.P_{b_1} : (P_b - P_c)$$

par suite l'excentricité de la courbe (σ) est donnée par:

$$OP : OA = \sqrt{P_b - P_a} : \sqrt{P_{b_1}} \,.$$

11. Si la surface Σ est un paraboloïde elliptique, le plan (ac) contient deux ombilics réels M_1, M_2; on prend pour plan σ le plan tangent en M_1, ce point est le foyer de la parabole (σ). L'axe de cette courbe est la tangente en M_1 à la parabole principale (S) de Σ dans le plan (ac); on désigne par E le point où il coupe l'axe a. Le sommet A_1 de cette courbe appartient à la corde commune aux coniques principales (S) et (S_1) des paraboloïdes Σ et Σ_1 dans le plan (ac), normale en A à l'axe a. Soient F_1, F_2 les foyers des paraboles principales de Σ dans les plans (ac) et (ab), S et S_1 les sommets de Σ et Σ_1, H le point $(a, M_1 M_2)$. On a ([1]):

$$SF_1 = HF_2 \,, \quad SF_1 = AS_1$$

par suite:

$$HE = 2\,HS = 2\,F_2F_1 \,; \quad AH = S_1F_2 \,.$$

Dans les triangles rectangles EM_1F, EM_1H on a:

$$\overline{M_1H}^2 = HE \,.\, FH = 4F_2F_1 \,.\, FF_2$$

$$\overline{M_1E}^2 = \overline{M_1H}^2 + \overline{HE}^2 = 4F_2F_1 \,.\, FF_1 \,.$$

---

[1] On applique aux paraboles focale et principale de Σ dans le plan (ac) puis aux paraboles (S) et (S′) la propriété: *Deux paraboles homofocales ont une corde commune réelle ou idéale, normale à l'axe en un point* X. *Si* S, S_1, F_1 *sont les sommets de ces courbes et leur foyer commun on a:*

$$SF_1 = XS_1$$

car si Y et Z sont les pôles de la corde commune relativement aux paraboles (S) et (S_1) on a:

$$YS = SX \,, \quad ZS_1 = S_1X \,, \quad F_1Y + F_1Z = 0 \,.$$

d'ou

$$SX + S_1X = F_1S + F_1S_1 \,; \quad SF_1 = XS_1 \,.$$

De la proportion

$$A_1M_1 : AH = M_1E : HE$$

on déduit à l'aide des égalités précédentes:

$$M_1A_1 = S_1F_2 \sqrt{FF_1} : \sqrt{F_2F_1}$$

relation qui fait connaître *le paramètre principal de la parabole* (σ).

12. Dans le cas du paraboloïde hyperbolique, on projette la ligne de courbure ($\Sigma\Sigma_1$) parallèlement à la direction principale *c*, sur un plan directeur passant par l'axe de la surface. Cet axe est en même temps celui de la parabole (σ) et le point $H \equiv (a, M_1M_2)$ est le foyer de cette courbe (8); M_1, M_2 sont les ombilics de Σ dans le plan (*ac*), Le sommet A de (σ) appartient à la corde commune aux paraboles principales de Σ et Σ_1 dans le plan (*ac*) et on a d'après le lemme du numéro précédent:

$$SF_1 = HF_2, \quad SF_1 = AS_1, \quad AH = S_1F_2.$$

Ainsi: *La ligne de courbure* ($\Sigma\Sigma_1$) *d'un paraboloïde hyperbolique* Σ *est projetée parallèlement à la direction principale* c, *sur un plan directeur de cette surface, suivant une parabole égale à la para'ole principale de la surface* Σ_1 *dans le plan de symétrie* (ab).

13. Dans le plan de symétrie (*ac*) ou (*bc*) selon que l'axe *a* ou *b* contient des points focaux réels de Σ (3), on considère un ombilic réel ou imaginaire M_1 de la surface. Par ce point passent deux génératrices isotropes *g* et *g'* tangentes à la ligne de courbure ($\Sigma\Sigma_1$) aux points G_1 et G'_1 (7), la projection de la droite $G_1G'_1$ sur le plan σ, faite parallèlement à la direction principale *c* est une directrice de la conique (σ) (8). Les points G_1 et G'_1 sont les points de contact de la surface Σ_1 et des plans isotropes γ et γ' issus de *g* et *g'* (7). ces plans passent par la normale en M_1 à Σ et par le point focal réel que cette normale détermine sur l'axe *a* ou *b* (2). Le plan polaire de F relativement à Σ_1 passe donc par la droite $G_1G'_1$ et comme il est parallèle à la direction principale *c*, ce plan polaire est le plan projetant $G_1G'_1$ sur le plan σ. Ainsi: *Les directrices de la conique* (σ)

projection de la ligne de courbure $(\Sigma\Sigma_1)$ *sur le plan* σ, *faite parallèlement à la direction principale* c, *sont dans les plans polaires relativement à* Σ_1 *des points focaux réels situés sur l'axe* a *ou* b.

14. Soient R et S les projections orthogonales d'un point M du plan σ sur une directrice de la conique (σ) et sur le plan polaire du point focal F, correspondant à cette directrice. Dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe (10) ou du paraboloïde hyperbolique (12) les points R et S coïncident. Dans le cas de l'ellipsoïde ou de l'hyperboloïde à deux nappes les triangles MRS et OEE_1 (9) sont semblables et on a :

$$MR : MS = E_1E : OE = \sqrt{P_b}\sqrt{P_a - P_c} : \sqrt{P_a}\sqrt{P_b - P_c}.$$

Dans le cas du paraboloïde elliptique (11) les triangles MRS et M_1HE sont semblables et on a :

$$MR : MS = M_1E : HE = \sqrt{FF_1} : \sqrt{F_2F_1}.$$

15. Nous avons démontré géométriquement le théorème suivant : *Un point réel* K *appartenant à un plan de symétrie* (ab) *non perpendiculaire aux plans des sections circulaires réelles d'une surface du second degré est le centre d'une sphère de rayon* l *ayant un double contact avec la quadrique. Si* k *est la corde des contacts,* M *un point quelconque de la surface,* K_1 *le point d'intersection de la droite* k *avec un plan de section circulaire passant par* M *on a* (1):

$$\overline{MK}^2 - l^2 = \overline{MK_1}^2 \times c^{te}.$$

cette constante est indépendante de la position du point K dans le plan de symétrie (ab). Si T, T_1, C sont les pôles d'une droite t relativement aux coniques focale et principale du plan (ab) et aux foyers communs à ces courbes, sur l'axe a cette constante a^2

(1) C. Servais. *Sur les sphères bitangentes dans les surfaces du second degré* (*Bulletin Académie Royale de Belgique* (3), XXVI, 94).

est donnée par l'égalité:

$$\alpha^2 = CT : CT_1 .$$

Pour déterminer α^2 on prend la droite t normale à l'axe a, au foyer F_2 commun aux coniques focale et principale du plan (ab). Le point C est alors identique à F_2 et les points T et T_1 sont les pieds des directrices de ces coniques, correspondant au foyer F_2.

Dans le cas d'une quadrique à centre O on a:

$$\alpha^2 = \frac{F_2T}{F_2T_1} = \frac{OT - OF_2}{OT_1 - OF_2} = \frac{OT . OF_2 - \overline{OF}_2^2}{OT_1 . OF_2 - \overline{OF}_2^2} .$$

Mais:

$$OT . OF_2 = P_a - P_c , \quad \overline{OF}_2^2 = P_a - P_b , \quad OT_1 . OF_2 = P_a$$

donc:

$$\alpha^2 = (P_b - P_c) : P_b .$$

Dans le cas d'un paraboloïde elliptique on a

$$F_2T = 2F_2F_1 , \quad F_2T_1 = 2F_2S , \quad F_2S = FF_1$$

donc:

$$\alpha^2 = F_2F_1 : FF_1 .$$

10. Le théorème précédent est applicable au paraboloïde hyperbolique, si l'on substitue au plan de section circulaire mené par M un plan directeur μ passant par ce point on a alors:

$$\overline{MK}^2 - l^2 = \overline{MK}_1^2$$

la constante α^2 est égale à l'unité. En effet le plan polaire du point K_1 par rapport à la quadrique est perpendiculaire à la droite K_1K en un point K_2 et si l'on pose

$$l^2 = KK_1 . KK_2$$

l^2 sera le carré du rayon de la sphère de centre K ayant un double contact avec la quadrique sur la droite k. Ce plan coupe le plan μ suivant la polaire k_1 de K_1 par rapport à la conique dégénérée formée par les deux génératrices situées dans ce plan; l'une d'elles étant à l'infini, l'autre g est parallèle à k_1 et passe par M. Si la droite k_1 coupe MK_1 en un point N on a donc: $NM = MK_1$. Le point K_2 étant la projection orthogonale de N sur la droite KK_1, la projection du point M sur la même droite est le milieu I du segment K_1K_2. Dans le triangle KMK_1 on a:

$$\overline{MK}^2 = \overline{MK}_1^2 + \overline{KK}_1^2 + 2KK_1\,K_1I = \overline{MK}_1^2 + KK_1\,.\,KK_2$$

par conséquent:

$$\overline{MK}^2 - l^2 = \overline{MK}_1^2.$$

17. Soient F un point focal réel de la quadrique Σ, f et f' les polaires de ce point relativement aux coniques focales des plans de symétrie issus de F. Ces droites joignent respectivement les couples d'ombilics M_1M_2, $M'_1M'_2$ (2). La normale au point M_1 à Σ passant par F (2), le plan tangent en M_1 doit contenir la polaire f' de F relativement à la conique focale du plan de symétrie $FM'_1M'_2$. On en conclut que les droites f et f' sont conjuguées par rapport à Σ et que les droites $M_1M'_2$, $M_1M'_2$, $M_2M'_1$ $M_2M'_2$ sont les génératrices isotropes aux points M_1, M_2, M'_1, M'_2. Ainsi la sphère (F) de centre F tangente à Σ aux extrémités de la corde M_1M_2 est aussi tangente à la même surface aux extrémités de la corde $M'_1M'_2$. Si le point focal F est sur l'axe a ou b l'une des cordes M_1M_2, $M'_1M'_2$, par ex.: M_1M_2 est parallèle à la direction principale c. Par un point quelconque M d'une ligne de courbure $(\Sigma\Sigma_1)$ on mène un plan de section circulaire σ, ou un plan directeur σ, il coupe la droite M_1M_2 en un foyer W de la conique (σ) (8). Dans le cas de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde à deux nappes on a (9, 14, 15):

$$\frac{MW}{MR} = \frac{\sqrt{P_a - P_b}}{\sqrt{P_{a_1}}}\quad \frac{MR}{MS} = \frac{\sqrt{P_b}\,\sqrt{P_a - P_c}}{\sqrt{P_a}\,\sqrt{P_b - P_c}},\quad \frac{t}{MW} = \frac{\sqrt{P_b - P_c}}{\sqrt{P_b}}$$

t désignant la longueur de la tangente menée du point M à la

sphère focale (F) par suite:

$$\frac{t}{MS}=\frac{\sqrt{P_a-P_b}\,.\,\sqrt{P_a-P_c}}{\sqrt{P_a}\,\sqrt{P_{a_1}}}=\frac{OF}{\sqrt{P_{a_1}}} \qquad (1)$$

Dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe, on a (10, 14, 15):

$$\frac{MW}{MR}=\frac{\sqrt{P_b-P_a}}{\sqrt{P_{b1}}} \quad MR=MS\,, \quad \frac{t}{MW}=\frac{\sqrt{P_b-P_c}}{\sqrt{P_b}}$$

d'où:

$$\frac{t}{MS}=\frac{\sqrt{P_b-P_a}\,.\,\sqrt{P_b-P_c}}{\sqrt{P_b}\,\sqrt{P_{b1}}}=\frac{OF}{\sqrt{P_{b_1}}}\,. \qquad (2)$$

Dans le cas du paraboloïde elliptique on a (11, 14, 15)

$$MW=MR\,, \quad \frac{MR}{MS}=\frac{\sqrt{FF_1}}{\sqrt{F_2F_1}}\,, \quad \frac{MW}{t}=\frac{\sqrt{F_2F_1}}{\sqrt{FF_1}}$$

d'où:

$$t=MS\,. \qquad (3)$$

Enfin dans le cas du paraboloïde hyperbolique on a (12, 14, 15)

$$MW=MR\,, \quad MR=MS \quad t=MW$$

d'où

$$t=MS\,. \qquad (4)$$

Les égalités (1), (2), (3), (4) montrent que: *Si* F *est un point focal réel d'une quadrique* Σ *à centre* O, *pour tout point* M *d'une ligne de courbure* $(\Sigma\Sigma_1)$ *la tangente menée de ce point à la sphère focale* (F) *est à la distance du même point au plan polaire de* F *relativement à la quadrique* Σ_1 *dans un rapport constant; celui du segment* OF *au demi axe de* Σ_1 *dirigé suivant* OF. *Dans le*

cas d'un paraboloïde elliptique ou hyperbolique ce rapport est égal à l'unité.

18. Par chaque point réel M de la ligne de courbure $(\Sigma\Sigma_1)$ passe une troisième surface Σ_2 homofocale à Σ et coupant cette quadrique suivant la ligne de courbure $(\Sigma\Sigma_2)$. Le système de lignes de courbure ainsi obtenu est tel que deux quelconques d'entre elles n'ont aucun point commun réel. Car leurs projections sur le plan σ (8) sont des coniques homofocales à la projection de $(\Sigma\Sigma_1)$ sur le même plan, et chacune de ces coniques coupe la projection de $(\Sigma\Sigma_2)$ au point M', projection du point réel M choisi sur $(\Sigma\Sigma_1)$ pour déterminer la ligne de courbure $(\Sigma\Sigma_2)$. On obtient de même un second système de lignes de courbure sur Σ à l'aide d'une ligne de courbure $(\Sigma\Sigma_2)$. Si Σ est une quadrique à centre, l'un des systèmes est projeté suivant des ellipses homofocales, l'autre suivant des hyperboles homofocales. L'axe de symétrie passant par le point focal F contient un second point focal réel F' centre d'une sphère focale (F') tangente à Σ aux ombilics M_3, M_4, M'_3, M'_4 et l'une des cordes M_3M_4, $M'_3M'_4$ par ex.: M_3M_4 est parallèle à la direction principale c. Cette corde détermine sur le plan σ (8) le second foyer W' de la conique (σ). Si t' est la longueur de la tangente menée du point M à la sphère focale (F') on a (15, 9):

$$\frac{t}{MW} = \frac{\sqrt{P_b - P_c}}{\sqrt{P_b}} = \frac{t'}{MW'}, \quad MW \pm MW' = 2\frac{\sqrt{P_{a_1}}\,\sqrt{P_b}}{\sqrt{P_b - P_c}}$$

dans le cas de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde à deux nappes; d'ou

$$t \pm t' = 2\sqrt{P_{a_1}}. \tag{1}$$

Dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe on a (15, 10)

$$\frac{t}{MW} = \frac{\sqrt{P_b - P_c}}{\sqrt{P_b}} = \frac{t'}{MW'} \quad MW \pm MW' = 2\frac{\sqrt{P_{b_1}}\cdot\sqrt{P_b}}{\sqrt{P_b - P_c}}$$

d'ou

$$t \pm t' = 2\sqrt{P_{b_1}}. \tag{2}$$

Les egalités (1) et (2) montrent que: *Les tangentes menées de tout point d'une ligne de courbure* ($\Sigma\Sigma_1$) *aux sphères focales* (F) et (F') *ont une somme ou une différence constante selon que la ligne de courbure appartient à l'un ou à l'autre système; cette constante est égale à la longueur de l'axe* FF' *de la quadrique* Σ_1 *qui coupe* Σ *suivant la ligne de courbure considérée.*

19. Dans le cas d'un paraboloïde elliptique (11) la courbe (σ) est une parabole et on a:

$$AS_1 = SF_1 = HF_2 .$$

Cette égalité montre que si le sommet S_1 est sur le segment F_1F_2, les points S et A sont d'un même coté de H. Alors si X désigne le point d'intersection de l'axe M_1A_1 de (σ) avec la tangente en S à la section principale (ac) les points X et A_1 sont d'un même coté du point M_1. On en conclut que les paraboloïdes hyperboliques Σ_1 homofocaux à Σ déterminent sur Σ des lignes de courbure dont les projections sur le plan σ sont des paraboles homofocales tournées dans le sens de X vers M_1. Ces lignes de courbure forment un premier système sur la surface Σ. L'égalité $AS_1 = SF_1 = HF_2$ montre aussi que les paraboloïdes elliptiques homofocaux à Σ mais tournés en sens contraire déterminent sur Σ des lignes de courbure dont les projections sur le plan σ sont des paraboles homofocales tournées dans le sens de M_1 vers X. Ces lignes de courbure forment le second système sur la surface Σ.

Par un point quelconque M de la ligne de courbure ($\Sigma\Sigma_1$) on mène un plan de section circulaire réelle σ coupant la droite M_1M_2 au foyer W de la parabole (σ), section du cylindre projetant ($\Sigma\Sigma_1$) parallèlement à la direction principale c, par le même plan (σ) (8). Soient R' et S' les projections de M sur la parallèle menée par W à la directrice de (σ) et sur le plan mené par la droite M_1W normalement à l'axe de Σ. On convient de mesurer les segments MR' dans le sens de X vers M_1 et les segments MS' dans le sens de S vers H. Cela étant la somme $MW + MR'$ ou la différence $MW - MR'$ est égal au paramètre principal de (σ) selon que ($\Sigma\Sigma_1$) est une ligne de courbure du premier ou du second système de Σ. Ce paramètre principal est égale à $2M_1A_1$. Ainsi:

$$MW \pm MR' = 2M_1A_1 .$$

Mais (14, 15, 11)

$$\frac{MS'}{MR'} = \frac{MS}{MR} = \frac{\sqrt{F_2F_1}}{\sqrt{FF_1}}; \quad \frac{t}{MW} = \frac{\sqrt{F_2F_1}}{\sqrt{FF_1}}; \quad M_1A_1 = S_1F_2\frac{\sqrt{FF_1}}{\sqrt{F_2F_1}}$$

par suite:

$$t \pm MS' = 2S_1F_2.$$

La tangente menée de tout point M *d'une ligne de courbure* $(\Sigma\Sigma_1)$ *d'un paraboloïde elliptique* Σ *à la sphère focale et la distance* MS' *de ce point au plan normal à l'axe de* Σ *et contenant les ombilics réels, ont une somme ou une différence constante selon que la ligne de courbure appartient à l'un ou à l'autre système. La constante est égale au paramètre principal de la section principale de* Σ_1 *non située dans le plan de symétrie normal aux sections circulaires réelles. La distance* MS' *est comptée dans le sens positif de l'axe de* Σ.

20. Par la droite joignant les ombilics imaginaires conjugués du paraboloïde elliptique Σ on mène un plan normal à l'axe et on désigne par S'' la projection de M sur ce plan. On a:

$$MS' = MS'' + S''S' = MS'' + EH = MS'' + 2F_1F_2.$$

1.° Le sommet S_1 du paraboloïde de Σ_1 est sur le segment F_1F_2 on a (19)

$$t + MS' = 2S_1F_2, \quad t + MS'' = 2S_1F_1. \tag{1}$$

2.° Les sommets S et S_1 sont séparés par le segment F_1F_2 on a (19)

$$t - MS' = 2F_2S_1 \quad t - MS'' = 2F_1S_1. \tag{2}$$

Les égalités (1) et (2) montrent que le théorème précédent est applicable aux ombilics imaginaires conjugués du paraboloïde elliptique Σ. La constante est alors égale au paramètre de la section principale située dans le plan de symétrie normal aux sections circulaires réelles.

21. Le sommet S d'un paraboloïde hyperbolique Σ est situé sur le segment F_1F_2; la courbe (σ) est une parabole de foyer H et de sommet A (12) et on a (12):

$$SF_1 = HF_2 = AS_1 .$$

Cette égalité montre que les paraboloïdes elliptiques homofocaux à Σ et dont les sommets S_1 sont séparés de S par le foyer F_2 déterminant sur Σ un premier système de lignes de courbure $(\Sigma\Sigma_1)$ dont les projections sur le plan directeur σ sont des paraboles homofocales tournées dans le sens de S vers F_1. De même les paraboloïdes elliptiques homofocaux à Σ dont les sommets S_1 sont séparés de S par le foyer F_1, déterminent sur Σ un second système de lignes de courbure, dont les projections sur le plan σ sont des paraboles homofocales tournées dans le sens de S vers F_2.

Par un point quelconque M d'une ligne de courbure $(\Sigma\Sigma_1)$ on mène un plan directeur σ, parallèle á σ, coupant la droite M_1M_2 (12) au foyer W de la section (σ_1) du cylindre projetant $(\Sigma\Sigma_1)$ parallèlement à la direction principale c (8). Les projections R′ et S′ de M sur la parallèle menée par W à la directrice de (σ_1) et sur le plan mené par la droite M_1W normalement à l'axe de Σ coïncident. On convient de mesurer les segments MS′ dans le sens de S vers F_1; cela étant, la somme $MW + MS'$ ou la différence $MW - MS'$ est égale au paramètre de (σ_1) selon que $(\Sigma\Sigma_1)$ est une ligne de courbure du premier ou du second système. Ce paramètre est égal à $2S_1F_2$ (12) et on a $t = MW$ (16) par suite:

$$\pm MS' = 2S_1F_2 .$$

La tangente menée de tout point M *d'une ligne de courbure* $(\Sigma\Sigma_1)$ *d'un paraboloïde hyperbolique* Σ *à la sphère focale, et la distance* MS′ *de ce point au plan normal à l'axe et contenant deux ombilics imaginaires conjugués* M_1M_2, *ont une somme ou une différence constante selon que la ligne de courbure appartient à l'un ou à l'autre système. La distance* MS′ *est comptée dans le sens allant du sommet* S *de* Σ *au foyer* F_1 *de la parabole principale passant par les ombilics* M_1, M_2. *La constante est égale au paramètre de la section principale de* Σ, *dans le plan de symétrie normal á* M_1M_2.

22. On projette une ligne de courbure d'une quadrique non réglée Σ, parallèlement à la direction principale b, sur le plan de symétrie (ac) normal aux sections circulaires réelles, suivant une conique (τ). Les génératrices isotropes issues des deux ombilics réels M_1, M_2, sont projetées suivant les tangentes m_1, m_2 aux points M_1, M_2 de la conique principale de Σ dans le plan (ac). Les projections des points de contact de ces génératrices avec la ligne de courbure considerée $(\Sigma\Sigma_1)$ (7) sont sur l'intersection p du plan (ac) avec le plan polaire relatif à Σ_1, du point focal F correspondant aux ombilics M_1, M_2. Par conséquent la conique (τ) est tangente aux droites m_1, m_2, aux points m_1p, m_2p. Le produit des distances d'un point quelconque M' de la courbe (τ) aux tangentes m_1, m_2 est au carré de la distance de ce point à la corde des contacts p dans un rapport constant. On en conclut pour le point M de $(\Sigma\Sigma_1)$, dont la projection est le point M', la propriété: *Si* M_1 *et* M_2 *sont deux ombilics réels non diamétralement opposés d'une quadrique non réglée* Σ, *le produit des distances de tout point* M *d'une ligne de courbure* $(\Sigma\Sigma_1)$ *aux plans tangents en ces points est au carré de la distance de ce point au plan polaire relatif à* Σ_1 *du point focal correspondant aux ombilics* M_1, M_2 *dans une raison constante.*

23. Pour déterminer cette constante on considère séparément le cas d'une quadrique à centre (ellipsoïde et hyperboloïde à deux nappes) et celui du paraboloïde elliptique. On suppose pour fixer les idées la corde M_1M_2 normale à l'axe a; un sommet A' de la conique (τ) sur a, est le pied d'une corde communes aux coniques principales de Σ et Σ_1 dans le plan (ab). Si A'_1, A'_2 désignent les pôles de cette corde relativement à ces coniques, on a:

$$OA'.OA'_1 = P_a, \quad OA'.OA'_2 = P_{a_1}, \quad OA'_1.OA'_2 = P_a - P_b$$

par suite:

$$\overline{OA'}^2 = P_a . P_{a_1} : (P_a - P_b).$$

L'égalité (5)

$$\overline{OF}^2 = (P_a - P_b)(P_a - P_c) : P_a.$$

combinée avec la précédente, donne:

$$OA'.OF = \sqrt{P_{a_1}} : \sqrt{P_a - P_c}.$$

Les lettres E et U désignent respectivement les points m_1a, m_1p on a:

$$OF.OE = P_a - P_c \quad OF.OU = P_{a_1}$$

d'où

$$OF.A'E = \sqrt{P_a - P_c}\,(\sqrt{P_a - P_c} - \sqrt{P_{a_1}}),$$

$$OF.UA' = \sqrt{P_{a1}}\,(\sqrt{P_a - P_c} - \sqrt{P_{a_1}})$$

par suite:

$$A'E : UA' = \sqrt{P_a - P_c} : \sqrt{P_{a_1}}.$$

Si δ désigne la distance du point A′ à la droite m_1, on a (9)

$$\delta : A'E = OE_1 : EE_1 = \sqrt{P_c}\sqrt{P_a - P_b} : \sqrt{P_b}\sqrt{P_a - P_c}$$

donc:

$$\delta^2 : \overline{UA'}^2 = P_c(P_a - P_b) : P \quad . P_b$$

c'est la constante cherchée.

24. Corollaires I. Soient δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 les distances d'un point de la ligne de courbure $(\Sigma\Sigma_1)$ aux plans tangents en M_1, M_2, M_3, M_4, ombilics réels de Σ; k, k', k_1, k'_1 les distances de ce point aux plans polaires relatifs à Σ_1 des points focaux F et F′, F_1 et F'_1 situés respectivement sur les axes a et c. On a (22):

$$\delta_1\delta_2 : k^2 = \delta_3\delta_4 : k'^2 = P_c(P_a - P_b) : P_{a_1}.P_b$$

$$\delta_1\delta_4 : k_1^2 = \delta_2\delta_3 : k'^2_1 = P_a(P_c - P_b) : P_{c_1}.P_b$$

donc

$$kk' : k_1k'_1 = P_aP_{a_1}(P_c - P_b) : P_cP_{c_1}(P_a - P_b).$$

Le long de la ligne de courbure $(\Sigma\Sigma_1)$ *le produit des distances d'un* point M *de la courbe, aux plans polaires des points focaux* F *et* F′, *par rapport à la quadrique* Σ_1, *est au produit des distances du même point aux plans analogues pour les points focaux* F_1 *et* F'_1 *dans une raison constante.*

II. On a (17):

$$t : k = t' : k' = OF : \sqrt{P_{a_1}}$$

$$t_1 : k_1 = t'_1 : k'_1 = OF_1 : \sqrt{P_{c_1}}$$

t, t', t'_1, t'_1 désignant les tangentes menées du point M aux sphères focales de centre F, F′, F_1, F'_1. Par suite:

$$tt' = t_1 t'_1 .$$

Ainsi: *Le produit des tangentes menées de tout point d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde à deux nappes, aux sphères focales dont les centres sont sur l'axe* a *est égal au produit des tangentes menées du même point aux sphères focales dont les centres sont sur l'axe* c.

25. Dans le cas d'un paraboloïde elliptique, en désignant encore par A′ le sommet de la parabole (τ) (22), on a:

$$A'E = A'F_1 + F_1E = A'F_1 + FF_1 = A'F_1 + F_2S = A'F_1 + S_1A' = S_1F_1$$

$$A'U = A'S_1 + S_1U = A'S_1 + FS_1 = SF_2 + FS_1 = F_1F + FS_1 = F_1S_1$$

$$UA' = A'E .$$

Mais on a:

$$\delta^2 : \overline{A'E}^2 = \overline{FM}_1^2 : \overline{FE}^2 = FH . FE : \overline{FE}^2 = FH : FE = F_1S : F_2S$$

donc:

$$\delta^2 : \overline{A'U}^2 = F_1S : F_2S$$

c'est la constante du théorème (22) dans le cas du paraboloïde elliptique.

26. Corollaire. Le point M appartient à deux lignes de courbure $(\Sigma\Sigma_1)$, $(\Sigma\Sigma_2)$ du paraboloïde elliptique Σ; on a (25)

$$\delta_1\delta_2 : k_1^2 = F_1S : F_2S\,; \quad \delta_1\delta_2 : k_2^2 = F_1S : F_2S$$

δ_1, δ_2 désignant les distances du point M aux plans tangents en M_1 et M_2 à Σ, k_1, k_2 les distances du même point aux plans polaires relatifs à Σ_1, Σ_2 du point focal F. Par suite

$$k_1 = k_2\,.$$

Cette égalité peut aussi se déduire du théorème (17) on voit alors qu'elle subsiste pour un paraboloïde hyperbolique. Ainsi: *Un point* M *d'un paraboloïde* Σ *appartient à deux paraboloïdes homofocaux* Σ_1 *et* Σ_2*; les plans polaires du point focal* F *de* Σ, *relativement à* Σ_1 *et* Σ_2 *sont équidistants du point* M.

Voici une démonstration directe de cette propriété: Les lignes de courbure $(\Sigma\Sigma_1)$, $(\Sigma\Sigma_2)$ sont projetées orthogonalement sur le plan de symétrie (ac) suivant deux paraboles tangentes aux droites M_1E et M_2E (22) et passant par la projection M′ du point M, ainsi que par le symétrique M″ de M′ par rapport à l'axe a. On désigne par Y le point $(a,\,M'M'')$. Les tangentes à ces courbes au point M′ coupent a en deux points Z et Z_1 équidistants de E; car ce sont deux droites conjuguées par rapport à ces paraboles, et elles déterminent sur a deux points conjugués harmoniques relativement aux ombilics E et ∞ de ces deux courbes. Les polaires de E par rapport à ces paraboles sont les traces sur le plan (ac) des plans polaires du point focal F relativement à (Σ_1) et (Σ_2) (22). Si U et U_1 sont leurs points d'intersection avec l'axe a, on a

$$ZE = UY\,, \quad Z_1E = U_1Y\,.$$

Car relativement à une parabole la ponctuelle des pôles sur a est inversément égale au faisceau des polaires. Par suite

$$UY = YU_1\,.$$

27. Le plan μ, tangent à Σ_1 en un point M de la ligne de

courbure $(\Sigma\Sigma_1)$ d'une quadrique à centre Σ, est un des deux plans principaux de la surface Σ au point M. Si M se déplace sur la courbe $(\Sigma\Sigma_1)$, le plan μ enveloppe une développable circonscrite à la quadrique Σ_1 et à la polaire reciproque Σ' de Σ relativement à Σ_1. Une position μ_1 choisie arbitrairement mais fixe du plan μ, détermine une quadrique de révolution (R) tangente à μ_1 et dont la méridienne a pour foyers les points focaux réels F et F' de Σ. Cette quadrique (R) est tangente à neuf plans tangents à la développable $(\Sigma'\Sigma_1)$: le plan choisi μ_1 et les huit plans isotropes, passant par les huit génératrices isotropes de Σ (7). La développable est donc circonscrite à (R). Par conséquent: ***Si des points focaux* F *et* F' *on abaisse des perpendiculaires sur un plan normal principal de la quadrique* Σ, *tangent à une ligne de courbure* $(\Sigma\Sigma_1)$ *en un point variable* M *de cette courbe, le produit de ces perperdiculaires est constant.***

Pour déterminer cette constante, on choisit le point M de la ligne de courbure $(\Sigma\Sigma_1)$ sur l'une des coniques principales des plans (ab), (ac) par ex.: (ac). Le plan normal principal tangent en M à la ligne de courbure passe par la normale MN à la conique principale et est perpendiculaire au plan (ac); par suite les perpendiculaires abaissées des points focaux F et F' sur le plan normal principal sont les distances δ et δ' de ces points à la normale MN. On désigne par N, T les traces de la normale et de la tangente en M sur l'axe a; par M' la projection de M sur le même axe. On a;

$$ON.OM' = P_{a_1}, \quad ON.OT = P_a - P_c \quad OM'.OT = P_a$$

On déduit de ces égalités:

$$\overline{ON}^2 = P_{a_1}(P_a - P_c) : P_a \quad \overline{OT}^2 = P_a(P_a - P_c) : P_{a_1}$$

et par analogie

$$\overline{OT_1}^2 = P_c(P_c - P_a) : P_{c_1}$$

T_1 étant la trace de MT sur l'axe c. Par suite

$$\overline{TT_1}^2 = (P_a - P_c)(P_a P_{c_1} - P_c P_{a_1}) : P_{a_1} . P_{c_1}$$

On a:

$$FN.F'N = \overline{ON}^2 - \overline{OF}^2 = (P_a - P_c)(P_{a_1} - P_a + P_b) : P_a .$$

Si l'on pose:

$$h = P_{a_1} - P_a = P_{b_1} - P_b = P_{c_1} - P_c$$

on a

$$P_a P_{c_1} - P_c P_{a_1} = h(P_a - P_c) = (P_{a_1} - P_a)(P_a - P_c)$$

$$\overline{TT_1}^2 = (P_a - P_c)^2 (P_{a_1} - P_a) : P_{a_1}.P_{c_1} ; \quad FN.F'N = P_{b_1}(P_a - P_c) : P_c$$

Mais:

$$\delta\delta' : FN.F'N = \overline{OT}^2 : \overline{TT_1}^2$$

par conséquent

$$\delta\delta' = P_{b_1} \ P_{c_1} : (P_{a_1} - P_a).$$

28. Soient C_1, C_2 les centres de courbure des sections principales NMP, NMQ au point M de la quadrique Σ, P_1, Q_1 les traces sur l'axe c des droites NP, NQ, R_1 celle de NR sur l'axe a; C'_1, C'_2 les projections de C_1, C_2 sur le plan de symétrie (ac), elles appartiennent à la droite NR. Le point C_1 est le sommet d'un cône du complexe des droites normales á leurs conjuguées relativement à Σ; MN est une génératrice de ce cône et le plan MNP est le plan tangent le long de cette génératrice car C_1 est le point de rencontre de deux normales infiniment voisines de Σ. La section de ce cône par le plan (ac) est une hyperbole passant par le centre O de Σ, par les points à l'infini A et C des axes a et c, et par le point C'_1; elle est tangente en N à la droite NP. L'hexagone de Pascal C'_1NNAOC montre que la projection C''_1 de C'_1 sur la droite NA appartient à la droite R_1P_1. Ce point C''_1 est aussi la projection du point C_1 sur la même droite NA. De même la projection C''_2 du point C_2 sur la droite NA est située sur R_1Q_1. Ainsi: *Les plans principaux en un point* M *d'une quadrique* Σ *déterminent sur l'axe de symétrie* c *les points* P_1, Q_1, *le plan projetant la normale sur le plan* (ac) *coupe l'axe*

a *au point* R_1*; les projections des centres de courbure principaux* C_1, C_2 *au point* M, *sur la parallèle à l'axe a menée par la trace* N *de la normale sur le plan* (ac), *appartiennent respectivement aux droites* R_1P_1, R_1Q_1.

De cette propriété et du théorème (1) résulte: *Les droites joignant le point* R_1 *aux projections des centres de courbure principaux sur la parallèle menée par* N *à l'axe* a, *sont séparées harmoniquement par les points focaux de* Σ *situés sur l'axe* c.

29. L'hexagone de Pascal C'_1NNOAC montre que le diamètre ON rencontre la droite $C'_1C''_1$ en un point I de la parallèle menée par le point R_1 à la droite NP. De même la droite $C'_2C''_2$ coupe ce diamètre en un point J de la parallèle menée par le même point R_1 à la droite NQ. Ainsi: *Les plans menés normalement à l'axe* a *par les centres de courbure principaux* C_1, C_2 *coupent le diamètre* ON *en deux points* I *et* J *tels que les droites* R_1I *et* R_1J *sont respectivement parallèles aux plans des sections normales principales* MNP *et* MNQ *au point* M *de la quadrique* Σ.

Si S et T désignent les points (*a*, NP), (*a*, NQ) on a:

$$OS:SR_1 = ON:NI\,; \quad OT:TR_1 = ON:NJ$$

par suite:

$$(OR_1ST) = NJ:NI = NC'_2:NC'_1 = NC_2:NC_1\,.$$

Ainsi: *Le rapport anharmonique du faisceau formé par les plans* μ_1, μ_2 *des sections normales principales* MNP, MNQ, *le plan normal diamétral* $\omega \equiv MNO$, *le plan* $\nu \equiv MNR$ *projetant la normale sur le plan de symétrie* (ac) *est égal au rapport* $NC_2:NC_1$.

Soient ν_1 le plan projetant la normale MN sur le plan de symétrie (*ab*), N_1 la trace de la normale sur ce plan de symétrie les égalités:

$$(\mu_1\,\mu_2\,\omega\,\nu) = NC_2:NC_1\,; \quad (\mu_1\,\mu_2\,\omega\,\nu_1) = N_1C_2:N_1C_1$$

donnent:

$$(\mu_1\,\mu_2\,\nu\,\nu_1) = (C_1C_2NN_1)\,. \tag{1}$$

De même

$$(\mu_1 \mu_2 \nu \nu_2) = (C_1 C_2 N N_2) \qquad (2)$$

le plan ν_2 et le point N_2 étant analogues au plan ν_1 et au point N_1 pour le plan de symétrie (bc). Les égalités (1) et (2) montrent que: *Le faisceau formé par les plans* μ_1, μ_2, ν, ν_1, ν_2 *est projectif à la ponctuelle* C_1, C_2, N, N_1, N_2.

Juillet, 1906.

SOBRE O CAMPO MAGNETICO GIRANTE DEVIDO ÁS CORRENTES POLYPHASICAS

POR

J. Pedro Teixeira

Professor na Academia Polytechnica do Porto

É sabido que uma corrente diphasica ou triphasica gera, com disposições adequadas, um campo de valor constante e egual ao campo maximo gerado por uma das correntes elementares, no primeiro caso, e a tres meios d'este mesmo campo, no segundo; e é em ambos os casos animado d'um movimento uniforme de velocidade egual á pulsação. Para correntes d'outras ordens, julgamos que não tem sido dada a expressão do campo; e como isto poderá ser d'algum interesse, vae ser objecto d'esta nota.

Sendo i, i_1, etc., os valores instantaneos das correntes elementares, J, a, T a sua amplitude, a sua pulsação, o seu periodo e t o tempo contado d'uma origem convenientemente escolhida para que se elimine da phase o angulo de *calagem*, uma corrente polyphasica é dada pelo systema:

$$i = \mathrm{J} \operatorname{sen} at,$$

$$i_1 = \mathrm{J} \operatorname{sen} \left(at + \frac{\mathrm{T}}{m} \right),$$

$$i_2 = \mathrm{J} \operatorname{sen} \left(at + 2\frac{\mathrm{T}}{m} \right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$i_{m-1} = \mathrm{J} \operatorname{sen} \left[at + (m-1)\frac{\mathrm{T}}{m} \right].$$

Lançando as correntes elementares respectivamente em m bobinas circulares eguaes, com um diametro commum, e formando diedros eguaes a $2\pi : m$, estas bobinas originam campos magneticos dados pelas equações:

$$h = \mathrm{H}\,\mathrm{sen}\,at\,,$$

$$h_1 = \mathrm{H}\,\mathrm{sen}\left(at + \frac{2\pi}{m}\right),$$

$$h_2 = \mathrm{H}\,\mathrm{sen}\left(at + 2\frac{2\pi}{m}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h_{m-1} = \mathrm{H}\,\mathrm{sen}\left[at + (m-1)\frac{2\pi}{m}\right],$$

onde h, h, etc., são os valores instantaneos e H o valor maximo d'esses campos.

Elles são a cada instante normaes ás respectivas bobinas.

Para achar o campo resultante, bastará achar as sommas das projecções dos campos componentes sobre duas rectas perpendiculares. Uma d'ellas será aquella de que faz parte o vector figurativo de h e a outra, a perpendicular a esta e existente num plano parallelo aos campos.

Com esta escolha, e chamando X e Y as componentes do campo resultante, é claro que é:

$$\mathrm{X} = \mathrm{H}\left\{\mathrm{sen}\left(at + \frac{2\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{m}\right) + \mathrm{sen}\left(at + 2\frac{2\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{2}{\pi}\right.\right.$$
$$\left.\left. + 2\frac{2\pi}{m}\right) + \ldots + \mathrm{sen}\left[at + (m-1)\frac{2\pi}{m}\right]\cos\left[\frac{\pi}{2} + (m-1)\frac{2\pi}{m}\right]\right\},$$

e

$$\mathrm{Y} = \mathrm{H}\left\{\mathrm{sen}\,at + \mathrm{sen}\left(at + \frac{2\pi}{m}\right)\cos\frac{2\pi}{m} + \mathrm{sen}\left(at + 2\frac{2\pi}{m}\right)\cos 2\frac{2\pi}{m} + \ldots\right.$$
$$\left. + \mathrm{sen}\left[at + (m-1)\frac{2\pi}{m}\right]\cos(m-1)\frac{2\pi}{m}\right\}.$$

Como é

$$\operatorname{sen}\left(at+k\frac{2\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\frac{2\pi}{m}\right)+\operatorname{sen}\left[at+(m-k)\frac{2\pi}{m}\right]\cos\left[\frac{\pi}{2}\right.$$
$$\left.+(m-k)\frac{2\pi}{m}\right]=-2\cos at\operatorname{sen}^2 k\frac{2\pi}{m},$$

e

$$\operatorname{sen}\left(at+k\frac{2\pi}{m}\right)\cos k\frac{2\pi}{m}+\operatorname{sen}\left[at+(m-k)\frac{2\pi}{m}\right]\cos(m-k)\frac{2\pi}{m}$$
$$=2\operatorname{sen} at\cos^2 k\frac{2\pi}{m},$$

teremos:

$$X=-2H\cos at\left(\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{m}+\operatorname{sen}^2 2\frac{2\pi}{m}+\ldots+\operatorname{sen}^2\frac{m-1}{2}\frac{2\pi}{m}\right),$$

$$Y=H\operatorname{sen} at\left(1+2\cos^2\frac{2\pi}{m}+2\cos^2 2\frac{2\pi}{m}+\ldots+2\cos^2\frac{m-1}{2}\frac{2\pi}{m}\right),$$

se m é impar; e

$$X=H\left[-2\cos at\left(\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{m}+\operatorname{sen}^2 2\frac{2\pi}{m}+\ldots+\operatorname{sen}^2\frac{m-2}{2}\frac{2\pi}{m}\right)\right.$$
$$\left.\operatorname{sen}\left(at+\frac{m}{2}\frac{2\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{m}{2}\frac{2\pi}{m}\right)\right],$$

$$Y=H\left[\operatorname{sen} at\left(1+2\cos^2\frac{2\pi}{m}+2\cos^2 2\frac{2\pi}{m}+\ldots+2\cos^2\frac{m-2}{2}\frac{2\pi}{m}\right)\right.$$
$$\left.+\operatorname{sen}\left(at+\frac{m}{2}\frac{2\pi}{m}\right)\cos\frac{m}{2}\frac{2\pi}{m}\right],$$

ou, visto ser

$$\operatorname{sen}(at+\pi)\cos\pi=\operatorname{sen} at,$$

e

$$\operatorname{sen}(at+\pi)\cos\frac{3\pi}{2}=0,$$

$$X=-2H\cos at\left(\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{m}+\operatorname{sen}^2 2\frac{2\pi}{m}+\ldots+\operatorname{sen}^2\frac{m-2}{2}\frac{2\pi}{m}\right),$$

$$Y=H\operatorname{sen} at\left(2+2\cos^2\frac{2\pi}{m}+\cos^2 2\frac{2\pi}{m}+\ldots+2\cos^2\frac{m-2}{2}\frac{2\pi}{m}\right),$$

se m é par.

Procuremos agora os valores das sommas dos quadrados dos senos e dos cosenos que figuram nas expressões dos componentes.

Temos, em geral, como facilmente se vê:

$$\sum_1^n \cos^2 ka=\frac{1}{2}\left(n-1+\sum_1^n \cos k\,2a\right),$$

onde a é um angulo qualquer e k um inteiro que toma os valores de 1 a n.

Pela formula que dá a somma dos cosenos dos angulos em progressão arithmetica, temos

$$\sum_1^n \cos^2 ka=\frac{1}{2}\left[n-1+\frac{\cos\frac{n}{2}2a\operatorname{sen}\frac{1}{2}(n+1)2a}{\operatorname{sen} a}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[n-1+\frac{\cos na\operatorname{sen}(n+1)a}{\operatorname{sen} a}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[n-\frac{1}{2}+\frac{\operatorname{sen}(2n+1)a}{2\operatorname{sen} a}\right];$$

por isso, teremos

$$\sum_1^n \cos^2 ka=\frac{2n-1}{4}+\frac{\operatorname{sen}(2n+1)a}{4\operatorname{sen} a},$$

e tambem

$$\sum_1^n \operatorname{sen}^2 ka = \frac{2n+1}{4} - \frac{\operatorname{sen}(2n+1)a}{4 \operatorname{sen} a}.$$

Destas equações deduzem-se

$$\sum_1^{\frac{m-1}{2}} \cos^2 k \frac{2\pi}{m} = \frac{m-2}{4}, \quad \sum_1^{\frac{m-1}{2}} \operatorname{sen}^2 k \frac{2\pi}{m} = \frac{m}{4},$$

$$\sum_1^{\frac{m-2}{2}} \cos^2 k \frac{2\pi}{m} = \frac{m-2}{4}, \quad \sum_1^{\frac{m-2}{2}} \operatorname{sen}^2 k \frac{2\pi}{m} = \frac{m}{4}$$

e por isso, para m par ou impar,

$$X = -\frac{Hm}{2} \cos at, \quad Y = \frac{Hm}{2} \operatorname{sen} at.$$

Estas equações mostram que o campo resultante tem um valor constante e egual a $\frac{mH}{2}$ e um movimento uniforme cuja velocidade é egual á pulsação.

Fica assim generalisado o theorema relativo aos campos magneticos girantes, que serve de base aos motores electricos, hoje muito em voga no transporte da energia.

SOBRE AS ESPIRICAS DE PERSEO

POR

F. Gomes Teixeira

Sabe-se bem que se dá o nome de *espirica de Perseo* á curva de quarta ordem que resulta da intersecção do toro com um plano parallelo ao eixo, e que a equação d'esta curva é (1)

$$(x^2+y^2+l^2+c^2-R^2)^2=4l^2(x^2+c^2).$$

A mesma curva pode tambem ser representada pelas duas equações

$$(1) \qquad x=\sqrt{t^2-c^2}, \quad y=\sqrt{R^2-(t-l)^2},$$

t sendo uma nova variavel independente, como fizemos notar em um trabalho publicado nos *Archiv der Mathematik und Physik* (Leipzig, 3.ª série, t. xi, 1906), onde nos occupámos da sua construcção por meio de um circulo e de medias porporcionaes entre dois segmentos de recta e da construcção das suas tangentes. Aqui vamos determinar por meio d'estas mesmas equa-

---

(1) Veja-se o nosso *Tratado de las curvas especiales notables* (Madrid, 1905, pag. 100). Supponos aqui conhecida a doutrina relativa ás espiricas que se encontra n'esta obra.

ções os pontos da inflexão da curva, a sua área e os volumes dos solidos de revolução á roda dos eixos. Depois completaremos um theorema de GARLIN relativo ás mesmas curvas, publicado nos *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1854, pag. 415).

I

Sobre os pontos de inflexão das espiricas

Applicando ás equações (1) a equação

$$x'y''-y'x''=0,$$

onde x', x'', y', y'' representam derivadas de x e y relativamente a t, obtem-se a equação

$$\text{(2)} \qquad R^2(t^2-c^2l)-c^2(t-l)^3=0,$$

que determina os valores que tem t nos pontos de inflexão da curva considerada, e da qual resulta immediatamente que o numero d'estes pontos é egual a 12.

Para vêr se estes pontos são reaes ou imaginarios, notemos que o discriminante D d'esta equação é

$$D=-\frac{27c^4l^2}{(R^2-c^2)^2}\{[c^2l^2(3R^2-c^2)+(R^2-c^2)^2(l^2-R^2)]^2-4c^2l^4R^6\}$$

e que pode ser escripto do modo seguinte:

$$D=-\frac{27c^4l^2}{(R^2-c^2)^2}(R-c)^2[R^2l^2-(R-c)^2l^2]\times(R+c)^2[R^2l^2-(R+c)^2l^2],$$

ou

$$D=-27c^4l^2R^4(l-R-c)(l+R+c)(l-R+c)(l+R-c).$$

Posto isto, vamos considerar os diversos casos que se podem apresentar, suppondo em todos estes casos que é $l > R$, o que tem logar quando o toro é aberto. O caso do toro fechado estuda-se do mesmo modo.

1.° Seja $l < c < l + R$. Então a curva é formada de uma unica oval e os seus pontos correspondem aos valores de t comprehendidos entre c e $l + R$. O discriminante D é neste caso positivo, e a equação (2) tem portanto tres raizes reaes, mas estas raizes estão comprehendidas entre 0 e l, l e c, $l + R$ e ∞, como se vê pelos signaes que toma o primeiro membro de (2) quando se substitue t pelos numeros 0, l, c, $l + R$ e ∞. Logo a curva não tem n'este caso pontos de inflexão reaes.

2.° Se $l - R < c < l$, a curva é ainda formada de uma oval, e o discriminante é ainda positivo e a equação (2) tem portanto ainda tres raizes reaes. Pelos signaes que toma o primeiro membro d'esta equação, quando se substitue t por $-\infty$, 0, c, l, ∞, vê-se que as tres raizes estão comprehendidas entre $-\infty$ e 0, 0 e c, c e l, quando $c < R$, ou entre 0 e c, c e l, l e ∞, quando $c > R$. Como os pontos reaes da curva correspondem aos valores de t comprehendidos entre c e $l + R$, vê-se que a curva tem então quatro pontos de inflexão reaes, correspondentes á raiz comprehendida entre c e l. Se $c = l$, estes pontos reunem-se em dois e formam dois pontos de ondulação.

3.° Se $c < l - R$, a curva é composta de duas ovaes, o discriminante D é negativo e duas raizes de (2) são portanto imaginarias.

N'este caso a raiz real de (2) está comprehendida entre 0 e $-\infty$, se $c < R$, ou entre $l + R$ e ∞, se $c > R$. Os pontos reaes da curva correspondem aos valores de t comprehendidos entre $l - R$ e $l + R$, e porisso a espirica não tem n'este caso pontos de inflexão reaes.

O que vimos de dizer não é applicavel ao caso de ser $R = c$. Então a equação (2) reduz-se á seguinte

$$3lt^2 - 3l^2t + l(l^2 - c^2) = 0\,,$$

e a curva só tem portanto oito pontos de inflexão a distancia finita. Mas vê-se facilmente por meio de uma discussão analoga á precedente que as conclusões a que se chegou ainda subsistem.

II

Sobre a quadratura das espiricas de Perseo e a cubatura dos seus solidos de revolução

O valor da area comprehendida entre um arco de uma espirica de Perseo, o eixo das abscissas e duas parallelas ao eixo das ordenadas passando pelos pontos cujas coordenadas são $(a, 0)$ e $(b, 0)$, pode ser calculado pela formula

$$A = \int_a^b y dx = \int_\alpha^\beta t \sqrt{\frac{R^2 - (t-l)^2}{t^2 - c^2}} dt,$$

onde α e β representam os valores que toma t n'estes pontos.

Vê-se pois que A depende das funcções elementares, quando $l \pm c = \pm R$, isto é, no caso das lemniscatas, e dos integraes ellipticos nos outros casos.

O volume do solido gerado pela área que vimos de considerar, quando gira á roda do eixo das abscissas, é expresso pela formula

$$V_1 = \pi \int_a^b y^2 dx = \int_\alpha^\beta \frac{t[R^2 - (t-l)^2]}{\sqrt{t^2 - c^2}} dt$$

ou

$$V_1 = \pi \left\{ \sqrt{t^2 - c^2} \left[R^2 - l^2 - \frac{2}{3} c^2 + lt - \frac{1}{3} t^2 \right] + c^2 l \log (t + \sqrt{t^2 - c^2}) \right\}_\alpha^\beta.$$

Em particular, para obter o volume do solido gerado por uma oval, deve-se fazer $\alpha = l - R$ e $\beta = l + R$, quando a espirica é composta de duas ovaes, e $\alpha = c$ e $\beta = l + R$, quando é formada de uma unica oval.

O volume do solido gerado pela área comprehendida entre a curva, o eixo das ordenadas e duas parallelas ao eixo das abscis-

sas passando pelos pontos $(0, u)$ e $(0, v)$ é dada pela formula

$$V_2 = \pi \int_u^v x^2 dy = \int_{t_2}^{t_1} \frac{(t-l)(t^2-c^2)}{\sqrt{R^2-(t-l)^2}} dt$$

ou

$$V_2 = \pi \left\{ \sqrt{R^2-(t-l)^2} \left[c^2 - \frac{2}{3} R^2 - \frac{1}{3} l^2 - \frac{1}{3} lt - \frac{1}{3} t^2 \right] \right.$$

$$\left. + R^2 l \operatorname{arc\,sen} \frac{t-l}{R} \right\}_{t_1}^{t_2}.$$

III

Sobre um theorema de Garlin

O theorema a que queremos referir-nos é o seguinte:

O logar geometrico dos pontos pelos quaes se podem tirar duas tangentes a uma ellipse ou a uma hyperbole formando um angulo α dado é uma espirica de Perseo.

Suppondo que

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1, \quad (a > b),$$

é a equação da conica dada, a equação do logar considerado (Garlin, l. c.) é

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(a + b + 2a \cot^2\alpha)\, x^2 - 2(a + b + 2b \cot^2\alpha) y^2$$

$$+ (a + b)^2 + 4ab \cot^2\alpha = 0.$$

As condições para que esta equação seja identica á das espiricas escripta no principio d'este artigo são

$$l^2 + R^2 - c^2 = a + b + 2a \cot^2\alpha,$$

$$R^2 - c^2 - l^2 = a + b + 2b \cot^2\alpha,$$

$$(l^2 + c^2 - R^2)^2 - 4l^2c^2 = (a + b)^2 + 4ab \cot^2\alpha,$$

ou

$$l^2=(a-b)\cot^2\alpha\,,\quad c^2=\frac{b^2}{(a-b)\operatorname{sen}^2\alpha}\,,\quad R^2=\frac{a^2}{(a-b)\operatorname{sen}^2\alpha}\,.$$

Vê-se por meio d'estas equações que a toda a conica corresponde uma espirica real, cujos parametros são determinados por estas equações, a qual satisfaz ás condições enunciadas no theorema.

Garlin não examinou a questão inversa da precedente, que é todavia facil de estudar.

As equações que vimos de escrever dão as seguintes:

$$a^2\cos^2\alpha=R^2l^2\operatorname{sen}^4\alpha,\quad a-b=l^2\tan^2\alpha,\quad a+b=(R^2-c^2)\operatorname{sen}^2\alpha,$$

ou

$$(3)\quad a=\frac{Rl^2}{R\pm c}\operatorname{tang}^2\alpha,\quad b=\mp\frac{cl^2}{R\pm c}\operatorname{tang}^2\alpha,\quad \operatorname{tang}^2\alpha=\frac{(R\pm c)^2-l^2}{l^2},$$

que determinam a, b e α, quando é dada a espirica. Temos pois o theorema seguinte, que completa o de Garlin:

Se os parametros de uma espirica de Perseo satisfazem á condição $R+c>l$, *existe uma hyperbole real tal que por cada ponto da espirica se lhe podem tirar duas tangentes formando um angulo real constante. Os eixos* $2a$ *e* $2b$ *d'esta conica são determinados pelas equações* (3).

Se os mesmos parametros satisfazem ás condições $R<c$ *e* $(R-c)^2>l^2$, *existe além da hyperbole precedente, uma ellipse real tal que por cada ponto da espirica se lhe podem tirar tambem duas tangentes formando um angulo real constante.*

Ajuntaremos ainda ao que precede que, qualquer que seja o valor dos parametros da espirica, existem sempre duas conicas taes que por cada ponto da espirica se lhes podem tirar duas tangentes formando angulos constantes; mas nos casos differentes dos que vimos de considerar, ou as conicas se reduzem a pontos, ou um dos valores de α é imaginario, ou os dois valores d'este angulo são imaginarios.

A VISÃO A DISTANCIA
E A TRANSMISSÃO RAPIDA DA PHOTOGRAPHIA

POR

A. Sousa Pinto

Professor na Academia Polytechnica do Porto

Está na lembrança de todos o caloroso enthusiasmo e a impressão de surpresa que a muitos causou a noticia, divulgada no final do anno de 1906, de ter sido descoberto pelo professor Korn, de Munich, um processo pratico para reproduzir em pouco tempo uma photographia, num ponto afastado d'aquelle em que se encontra a prova obtida directamente.

Para aquelles que acompanham de perto o movimento scientifico, essa surpresa não foi grande. A transmissão rapida da photographia, problema derivado d'outro de maior amplitude — o da visão a distancia —, ha muito tempo é objecto de investigações d'um grande numero de physicos, que successivamente se tem approximado de soluções de valor pratico. A solução de Korn tem realmente esse valor e justifica o enthusiasmo que despertou, se bem que ainda não possa considerar-se definitiva e perfeita.

Na historia das soluções apresentadas anteriormente, figura o nome d'um professor português, o Dr. Adriano de Paiva (Conde de Campo-Bello), cuja perda recente todos vivamente sentimos. Registar nestas paginas o logar que nessa historia lhe pertence, é o intuito d'esta breve noticia. A actualidade do assumpto levou-

nos a prolongá-la um pouco mais, para esboçar resumidamente a evolução do problema e o seu estado actual.

*

O movimento scientifico relativo ao problema que nos occupa data da descoberta do telephone de Bell, em 1876. As publicações dos annos seguintes mostram bem o interesse provocado pelo novo apparelho. Da actividade despertada em Portugal dá-nos noticia o Dr. Adriano de Paiva, num artigo publicado no *Instituto*, de Coimbra, e datado de 20 de fevereiro de 1878 (1). Nesse artigo aprecia o seu auctor o alcance da descoberta e, depois de diversas considerações interessantes sobre a telephonia, a telegraphia e um outro capitulo da Physica, a telescopia, diz que, pouco depois de ter tido conhecimento do telephone, lhe surgiu no espirito a ideia da possibilidade da applicação da electricidade á telescopia, para a visão de objectos afastados, ainda mesmo situados fóra do horisonte visual do observador.

Referindo-se ás difficuldades do problema, diz o Dr. Adriano de Paiva que se lhe não antolhava impossivel a realização pratica d'este. E, depois de lembrar o que se passava no telephone, accrescenta: «Uma camara escura, collocada no ponto que houvesse de ser sujeito ás observações, representaria, por assim dizer, a camara ocular. Sobre uma placa, situada no fundo d'esta camara, iria desenhar-se a imagem dos objectos exteriores, com as suas côres respectivas e accidentes particulares de illuminação, affectando assim diversamente as diversas regiões da placa. Tornava-se portanto apenas necessario descobrir o meio de operar a transformação, por nenhuma forma impossivel, d'esta energia, absorvida pela placa, em correntes electricas, que em seguida recompuzessem a imagem». — Mais adeante, depois de se referir á noticia, dada por Figuier (2), das tentativas feitas em

(1) *A telephonia, a telegraphia e a telescopia* — *O Instituto*, t. xxiv, n.º 9, março de 1878. Coimbra. Este artigo foi novamente publicado no *Commercio Portuguez*, do Porto, de 27 de abril de 1878, e mais tarde reunido com outros num folheto intitulado *La telescopie electrique basée sur l'emploi du sélénium*, Porto, 1888.

(2) *L'année scientifique et industrielle*, 21e année (1877), Paris, 1878, pag. 80.

Boston para a construcção d'um apparelho, com o mesmo fim de permittir a visão a distancia, e que chamavam *telectroscopio*, accrescenta ainda: «... as experiencias que tencionavamos realizar, e que ainda procuraremos levar a cabo, consistiam em ensaiar o emprego do selenio como placa sensivel da camara escura do telectroscopio. Este corpo, com effeito, gosa de uma notavel propriedade, cuja descoberta é de data muito recente. Quando interposto em um circuito electrico, que passa em um galvanometro, faz desviar sensivelmente a agulha d'este, todas as vezes que um facisculo luminoso vem incidir sobre elle, e demais este desvio é diverso sob a influencia das radiações de differente côr...».

Eis aqui, apresentada nitidamente, a ideia da applicação do selenio para a resolução do problema da visão a distancia. Para deixar bem claro o valor de tal alvitre, bastará apontar o facto de todas as soluções apresentadas posteriormente, até ás mais recentes, se fundarem sobre o aproveitamento da mesma propriedade do selenio.

É porisso interessante averiguar se foi effectivamente no artigo citado do Dr. ADRIANO DE PAIVA que a ideia foi lançada pela primeira vez. O exame das publicações da epocha, que nos foi possivel consultar, convenceu-nos de que assim foi realmente, não obstante a prioridade da ideia ser geralmente attribuida ao notario francês SENLECQ, d'Ardres.

A verdade é que SENLECQ só em novembro de 1878 enviou ao jornal *L'Électricité* uma nota sobre o seu *telectroscopio*, baseado sobre a mesma propriedade do selenio, nota qne só foi publicada em 16 de janeiro de 1879 (1), ao passo que o artigo do Dr. ADRIANO DE PAIVA foi publicado em março de 1878. SENLECQ conta que planeara o seu apparelho desde o principio de 1877, mas por seu lado o Dr. ADRIANO DE PAIVA diz que, logo depois da descoberta de BELL, dirigiu a sua attenção para o problema da visão a distancia por meio da creação da telescopia electrica, sendo de suppôr que a ideia do aproveitamento do selenio lhe surgisse muito antes da publicação do artigo do *Insti-*

---

(1) V. TH. DU MONCEL, *Le microphone*, pag. 202; Paris, Hachette, 1882. Na passagem que citamos ha evidentemente um erro de data, de facil correcção.

tuto. Não podemos pois referir-nos senão ás datas das primeiras publicações dos dois auctores e essas dão uma precedencia de perto d'um anno a favor do Dr. Adriano de Paiva.

Póde ter-se como certo que, como tantas vezes succede, ambos chegaram independentemente á mesma ideia, mas o que não é licito, em presença das datas apontadas, é continuar a attribuir a Senlecq a gloria de iniciador.

Por seu lado é justo dizer-se que Senlecq foi mais longe no estudo experimental do problema, cuja solução é por elle posta já com mais nitidez. Com o seu telectroscopio, baseado no principio dos apparelhos telegraphicos autographicos e com o estylete do transmissor feito de selenio, elle affirma ter obtido, com todas as suas gradações, a reproducção d'uma superficie sombreada (1).

Deixando as soluções, sem grande interesse pratico, propostas por Carey (2), Sawyer (3) e Perosino (4), não insistiremos tambem sobre as experiencias de Ayrton e Perry, cujos resultados, ainda insufficientes, representam todavia já um progresso consideravel.

Veio em seguida o systema de Shelford Bidwell que representa a primeira solução pratica embora incompleta do problema. No seu apparelho, que elle fez funccionar deante da Sociedade de Physica de Londres, a reproducção das imagens era ainda obtida pela combinação do emprego do selenio com o de estyletes autographicos, como propunha Senlecq. A originalidade do apparelho consistia em disposições experimentaes vantajosas, que permittiram a Bidwell demonstrar pela primeira vez a possibilidade da reproducção de imagens luminosas pela electricidade. É certo que essas imagens eram sómente de desenhos geometricos, cortados em folhas de estanho e projectados por uma lanterna magica e que, d'ahi até á reproducção das imagens da natureza, a distancia era enorme; mas não é menos verdade que o problema tinha avançado um grande passo.

Apesar d'isso, a actividade dos physicos no caminho assim

---

(1) V. P. Clemenceau, *La Lumière éléctrique*, t. II, pag. 447.
(2) *Scientific American*, 5 de junho de 1880.
(3) Id., 12 de junho de 1880.
(4) *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, t. XIV, disp. 4.

traçado não correspondeu ao que era de suppor que resultasse dos trabalhos de Bidwell. É assim que, nos dez annos seguintes, sómente temos a mencionar as soluções theoricas apresentadas por Nipkow (1885), por Weiller (1889) e por Sutton (1890) (1), que infelizmente não foram convertidas em apparelhos de valor pratico para a realização da visão a distancia.

Estava o problema nesta phase, quando appareceu um trabalho de Brillouin (2), em que as difficuldades a vencer para a sua solução experimental eram cuidadosamente examinadas, trabalho que orientou o assumpto numa nova direcção.

Antes de mostrar que a maior parte d'essas difficuldades tinham grande probabilidade de ser removidas, Brillouin occupa-se em especial d'uma, que considera muito difficil de vencer. Da necessidade da imagem transmittida dever parecer nitida, vista a olho nu, a uma distancia de 30 ou 40 cm., deduz Brillouin que é preciso deixar de pensar, como se fazia anteriormente, numa transmissão instantanea. É preciso, diz, empregar na transmissão todo o tempo que fôr necessario para descrever a imagem inteira, e para isso substituir ao apparelho visual, no posto de recepção, uma chapa photographica.

Nesta ordem de ideias, o problema que Brillouin considera possivel de resolver é o seguinte: «Um objecto qualquer, paisagem, figura ou quadro, vivamente illuminado, é collocado deante d'uma luneta que projecta uma imagem real sobre um apparelho transmissor conveniente. O transmissor é ligado por fios conductores da electricidade a um receptor afastado, por meio do qual uma imagem real, semelhante á imagem fornecida pela objectiva no ponto de partida, é descripta em alguns minutos, sobre a superficie d'uma chapa photographica, que se revela em seguida á maneira ordinaria.»

O problema ficava assim mais resticto, visto que se deixaria de obter a visão do objecto afastado, para se conseguir apenas receber a sua imagem fixada numa photographia, mas precisamente por ser restricto, ficava d'uma execução mais assegurada.

---

(1) Sobre estas soluções, assim como sobre as experiencias citadas de Ayrton e Perry e de Bidwell, póde ver-se o artigo de E. Mathias, publicado na *Revue Générale des Sciences*, t. I, 1890, pag. 798.

(2) *Revue Générale des Sciences*, t. II, 1891, pag. 33.

As tentativas que se fizeram para o resolver neste campo encontraram, como principal obstaculo, a difficuldade de construir um apparelho que permittisse transformar muito fracas correntes electricas em radiações luminosas de intensidades proporcionaes ás intensidades d'essas fracas correntes transmittidas.

Foi a realização d'uma disposição experimental feliz para a consecução d'esse resultado que constituiu a verdadeira novidade dos recentes trabalhos de Korn.

Concluiremos esta noticia dando uma rapida ideia das experiencias realizadas pelo professor allemão, cuja primeira communicação sobre o assumpto foi apresentada á Academia das Sciencias de Paris, em maio de 1903.

No posto de expedição, uma lampada de Nernst é empregada como apparelho illuminador. Os raios luminosos são concentrados, por meio d'uma lente, sobre uma pequena abertura feita num cylindro metallico, no interior do qual está collocado um outro cylindro, de vidro, sobre cuja superficie é enrolada uma pellicula photographica com a imagem a transmittir, e ao qual se pode imprimir um movimento helicoidal.

Ajustando a lente de modo que o seu foco esteja constantemente sobre a pellicula photographica, durante o movimento do cylindro, a pellicula vae sendo atravessada pela luz ao longo d'uma linha helicoidal, de voltas muito proximas. A intensidade da luz transmittida para o interior variará assim de instante a instante, conforme o ponto da pellicula atravessado.

Esta luz transmittida atravessa em seguida um prisma que a projecta sobre uma placa de selenio, intercalada no circuito d'uma pilha electrica, circuito que estabelece a communicação com o posto receptor. Conhecida a propriedade aproveitada do selenio, comprehende-se que, em cada instante, a intensidade da corrente transmittida ao posto receptor dependerá da intensidade da illuminação a que está submettido o selenio e, por conseguinte, do ponto da pellicula photographica que o fasciculo luminoso atravessou.

Vejamos agora o que se passa no posto de chegada. Os raios luminosos d'uma segunda lampada Nernst são concentrados por meio d'uma lente sobre a superficie d'um cylindro de vidro, sobre o qual se enrola a pellicula photographica destinada a receber a imagem transmittida, e a que se pode imprimir um movimento egual ao do cylindro do posto expedidor. No trajecto da

luz está porem interposto um galvanometro especial, que serve de obturador.

Este galvanometro compõe-se d'uma delgada folha de aluminio, collocada entre os dois fios do circuito que communica com o posto expedidor, e disposto de modo que as variações de intensidade da corrente electrica se traduzem por deslocamentos da folha de aluminio que, interceptando mais ou menos o fasciculo luminoso, regula a intensidade da luz que incide sobre a pellicula em cada instante. D'este modo a pellicula será em cada ponto submettida a uma acção luminosa tanto mais intensa, quanto maior for a intensidade da corrente no momento em que esse ponto da pellicula passa deante da abertura por onde entra a luz, e por conseguinte, quanto maior fôr a intensidade da luz recebida pela placa de selenio no posto expedidor.

Comprehende-se pois que se possa reproduzir com approximação a pellicula original, desde que os dois cylindros tenham movimentos perfeitamente concordantes, e que as voltas de espira descriptas pela pequena mancha luminosa em virtude do movimento helicoidal dos cylindros sejam muito proximas.

Por meio de apparelhos dispostos d'esta maneira conseguiu Korn reproduzir photographias, relativamente perfeitas, entre pontos afastados de muitos kilometros. O tempo necessario para essa reproducção era ao principio bastante consideravel, em virtude da *inercia* do selenio, que não obedece com rapidez, na variação de conductibilidade, á variação da illuminacão a que está submettido. Felizmente esta difficuldade póde dizer-se vencida pelo emprego d'um apparelho compensador, consistindo fundamentalmente numa segunda placa de selenio disposta de modo apropriado no posto receptor (1).

Com a introducção d'esta nova disposição, reduziu Korn notavelmente o tempo empregado na transmissão da photographia. Bastam, com effeito, seis minutos para transmittir uma imagem de Munich a Saint-Petersbourg; e é justificado esperar que as experiencias a que continúa procedendo, o levarão a augmentar ainda a velocidade da transmissão.

Em presença dos resultados já obtidos póde considerar-se

(1) Póde vêr-se a descripção d'este apparelho nos *C. R. de l'Academie des Sciences*, 3 de dezembro, 1906.

como um facto a resolução do problema da transmissão de photographias a distancia.

Por seu lado, o problema mais vasto da visão a distancia continúa de pé, e sem grande probabilidade de solução muito proxima. Todavia, longe de ser abandonado, está novamente a ser objecto de tentativas persistentes. Em França, citam-se experiencias, em via de execução, do professor Edouard Belin, da Universidade de Nancy. Da America chegam noticias muito recentes da invenção, attribuida a J. B. Fowler, de Portland (Orégon), d'um apparelho por meio do qual se poderiam transmittir simultaneamente as palavras e a imagem da pessoa que fala ao telephone. Faltam porém inteiramente os detalhes para se poder formar juizo sobre estes resultados.

Qualquer que seja o seu valor pratico, teem pelo menos a utilidade de continuar a abrir caminho para novos estudos.

Quanto aos trabalhos de Korn, a sua importancia é muito notavel, não só pelo valor real dos resultados a que levaram, mas tambem porque o problema da transmissão rapida da photographia a grandes distancias deve considerar-se, como dizia Brillouin no artigo a que nos referimos, um intermediario indispensavel para chegar á visão directa das imagens.

NÉGROIDES PRÉHISTORIQUES EN PORTUGAL

PAR

A. A. DA COSTA FERREIRA

Membre titulaire de la Société d'Anthropologie de Paris

(Extrait d'une lettre a Mr. le Prof. HERVÉ)

... Désirant satisfaire à la demande que vous m'avez déjà fait l'honneur de m'adresser par votre lettre du 30 avril 1905, et que vous avez bien voulu me renouveler personnellement lors de mon séjour a Paris, j'ai profité de mon voyage à Lisbonne, où j'étais appelé pour le dernier Congrès international de Médecine, pour tâcher de découvrir des crânes *negroïdes* dans quelqu'une des séries de la précieuse collection anthropologique du Musée de la Commission des travaux géologiques du Royaume.

Parfaitement accueilli par l'illustre Président de cette commission, Monsieur le Conseiller NERY DELGADO qui, avec ses excellents collaborateurs COUCEIRO et COTTER, et de la façon la plus aimable, a facilité toutes mes recherches, j'ai examiné de mon mieux les collections de ce musée; je dois avouer toutefois que le peu de temps dont je disposais ne m'a permis qu'une étude rapide et précipitée. Je crois, malgré tout, avoir recueilli des données de quelqu'intérêt, et j'espère bien, dès que l'occasion se présentera de répéter mes observations, tirer de nouveaux résultats d'un examen plus minutieux et plus attentif.

Au point de vue *négroïdisme*, j'ai été particulièrement frappé par le crâne du *Cabeço da Arruda*, dont je vous envoie ci-joint deux photographies, et par un autre, le n.° 1 du Musée, qui figure dans les «*Ages préhistoriques*» de CARTAILLAC, dans les *procès-verbaux* du Congrès de 80, et dans le Vol II des *Communicações dos trabalhos geologicos de Portugal* (crâne qui fut particulièrement étudié par mon compatriote, le malheureux et toujours regretté anthropologiste Mr. PAULA E OLIVEIRA). Mais de ces deux crânes celui qui se rapproche le plus des négroïdes que vous et Mr. VERNEAU avez découverts et étudiés, c'est celui du *Cabeço da Arruda*, endroit où vous avez si judicieusement soupçonné l'existence de vestiges de cet ancêtre, qui pourrait, je crois, nous donner la clef de l'un des principaux problèmes de toute l'anthropologie. Il nous apparait du moins comme un utile révolutionnaire, qui vient agiter, *ventiler* et ranimer de vieilles discussions où la science a tout à gagner.

Le crâne du *Cabeço da Arruda*, vu de profil, frappe surtout par l'accentuation de son prognathisme sous-nasal. La face est implantée obliquement, agressivement, si l'on peut dire. La toute petite saillie glabellaire, l'absence des os du nez, proprement dits, *souligne*, accentue plus encore les traits d'une physionomie négroïde. La ligne de profil de ce crâne rappelle fort celle du crâne de *Conguel*, qui figure dans votre mémoire sur *les crânes néolithiques armoricains du type négroïde*. Remarquez la courbe douce des pariétaux, à leurs deux tiers antérieurs, et l'incurvation brusque, le véritable aplatissement de cet os à sa partie postérieure, et encore à la partie supérieure de l'occipital; observez *l'occipitalisation* remarquable de cette courbe, et veuillez enfin noter aussi la quasi horisontalité de la région occipitale inférieure. Le crâne semble déprimé et tiré en arrière. Ce qui me frappe surtout dans ce crâne vu de face, c'est la forme du bord inférieur de l'ouverture nasale, obtus et présentant des gouttières bien dessinées.

L'indice céphalique (70) est inférieure à celui du crâne négroïde de PESARO (79) et se rapproche des bas indices de vos négroïdes armoricains (69 et 73) et de ceux des crânes de BAOUSSÉ-ROUSSÉ (69 et 68). Son indice nasal (48) leur est inférieur de quelques unités (50, 56 et 53, 51 et 63) et son indice orbitaire est très éléve (94).

Aussi, bien qu'à mon avis, le crâne du *Cabeço da Arruda*

présente un *facies* négroïde, et qu'il se rapproche, principalement par son indice céphalique et par les caractères descriptifs de sa courbe moyenne et de son ouverture nasale, des négroïdes dernierement décrits, il s'en écarte toutefois, et s'ecarte plus encore, surtout par la forme de ses orbites, de ceux de Baoussé-Roussé.

Vous jugerez de sa valeur. Dans ce but, je vous en envoie les photographies en même temps que quelques mesures que j'ai pu prende un peu à la hâte.

Comme terme de comparaison, j'ai mis en regard des miennes quelques-unes des mesures moyennes de portugais contemporains, d'après Mr. Ferraz de Macedo, ainsi que:

1° celles du crâne féminin de Mugem (n° 3) étudié par Paula e Oliveira;
1° celles du crâne sub-brachycéphale de Mugem (n° 1) étudié par le même anthropologiste;
3° celles des crânes négroïdes de Baoussé-Roussé (Mr. Verneau);
4° celles des crânes négroïdes de Bretagne (Mr. Hervé);
5° et enfin, les mesures du crâne de Pesaro (Mr. Papillault).

Aurai-je apporté quelques données de valeur qui contribuent à la solution du problême du *negroïdisme* dans les crânes préhistoriques? Puisse-t-il en être ainsi!

Et, à présent que je touche à la fin de cette lettre, ce qui me frappe le plus, ce n'est pas le fait d'avoir trouvé un négroïde dans le crâne de *Arruda*, mais c'est d'avoir eu entre les mains un type qui semble venir rendre de l'actualité et donne un point d'appui à la vieille prétention de Quatrefages, qui voulait voir dans quelques crânes de nos dolicocéphales mésolithiques des éléments pour la création d'un type ethnique spécial — *la race de Mugem.*

Remarquez le prognathisme infra nasal, l'harmonie craniofaciale, et la forme des orbites de ce crâne mésolithique de Kjoekkenmoeding de Arruda, et dites-moi s'il ne me donee pas raison? ....

Fig. 1 — Crâne négroide du Cabeço da Arruda (vu de perfil).

Fig. 2 — Le même crane (vu de face).

I

Tableau comparatif de quelques mesures dun crâne négroïde trouvé aux Kjoekkenmoedings de Cabeço d'Arruda (Portugal)

Région cranienne	Cabeço de Arruda	Crâne n.° 3 de Mugem	Crâne n.° 1 de Mugem	Crânes négroïdes de Baoussé-Roussé	Crânes négroïdes des armoricains	Crâne négroïde de Pesaro	Crânes portugais contemporains
Diamètre antéro-postérieur maximum .	181	173	172	—	—	173	184
—— transverse maximum	127	127	142	—	—	138	137
—— bi-temporal.	122	125	138	—	—	—	132
—— bi-auriculaire..................	114	110	132	—	—	—	120
—— frontal maximum........	107	104	120	—	—	109	115
—— minimum	88	93	97	—	—	92	96
—— vertical basilo-bregmatique.......	128	131	—	—	—	138	134
Courbe horizantale totale..............	500	408	514	—	—	—	517
—— pré-auriculaire................	220	215	230	—	—	—	240
—— transverse totale	420	408	?	—	—	—	437
—— sus-auriculaire	285	295	330	—	—	—	307
—— antero-posterieure totale..........	372	352	375	—	—	—	477
—— frontale sous-cérébrale..........	12	20	19	—	—	—	21
—— —— totale	120	115	100	—	—	—	129
—— pariétale	125	124	131	—	—	—	129
—— occipitale.......................	115	113	134	—	—	—	118
Longueur du trou occipital............	36	35	—	—	—	—	35
Largeur..............................	28	33	—	—	—	—	30
Ligne naso-basilaire.................	98	97	—	—	—	—	101
—— alvéolo-basilaire.....	87	—	—	—	—	—	—
Indice céphalique	70	73	82	69 e 68	69 e 73	79	74
—— vertical........................	70	75	—	—	73 e 74	79	72
—— transverso-vertical	99	96	—	—	105 e 102	—	—
—— frontal	82	73	68	—	—	84	69
—— de Flower	88	—	—	—	102 e 100	—	—

II

Tableau comparatif de quelques mesures dun crâne négroïde trouvé aux Kjoekkenmoedings de Cabeço d'Arruda (Portugal)

Région faciale	Cabeço de Arruda	Crâne n.º 3 de Mugem	Crâne n.º 1 de Mugem	Crânes négroïdes de Baoussé-Roussé	Crânes négroïdes des armoricains	Crâne négroïde de Pesaro	Crânes portugais contemporains
Distance bi-orbitaire externe	95	103	106	—	—	—	103
—— inter-orbitaire	23?	26	25	—	—	—	22
—— bi-zigomatique maxime	118?	121?	146?	—	—	125	127
Largeur des orbites	34	36	37	—	—	37	39
Hauteur ——	32	27	33	—	—	29	32
Largeur de l'ouverture nasale	22	22	—	—	—	24	15
Hauteur ——	45	44	—	—	—	47	52
—— simple de la face (ophr. alv.)	78	80	87	—	—	—	—
Indice facial	66?	66?	59?	—	—	—	71
—— orbitaire	94	75	89	—	—	77	92
—— nasal	48	50	—	51 e 63	56 e 53	50	44
Machoire inférieure							
Diamètre bi-angulaire	81	87	89	—	—	—	97
Distance angulo-symphisienne	82	86	84	—	—	—	86
Hauteur à la symphise	30?	32	34	—	—	—	34
Longueur de la hanche necretante	60	55	64	—	—	—	61
Largeur-transverse	30	30	30	—	—	—	32

NOTE SUR L'AIRE DES PODAIRES DES CONIQUES À CENTRE

PAR

H. Wieleitner

Dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, t. XII, 1905, p. 50, M. E.-N. Barisien a posé la question suivante:

«On sait qu'étant donnée l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

l'aire de la podaire de l'ellipse par rapport au point (α, β) est

$$U = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2).$$

Je voudrais avoir, dans les mêmes conditions, l'aire de la podaire de l'hyperbole

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0».$$

Cette question fut résolue dans le même volume (p. 187-189) par M. E. Malo, qui a obtenu par une voie assez longue et adaptée à l'hyperbole seule, le résultat (au signe près et abstraction faite d'une faute d'impression)

$$S = \frac{a^2\pi\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

En ce qui suit, je vais déduire les valeurs de U et S par un procédé très simple et qui est le même pour l'ellipse que pour l'hyperbole.

D'abord, j'appele aire d'une branche fermée, mais qui peut se traverser elle-même n'importe combien de fois, d'une courbe, d'après la généralisation que Gauss a donné à la notion d'aire [1], la somme algébrique des éléments d'aire, que décrit le rayon vecteur, quand son extrémité parcourt une fois toute la branche. Or, la podaire d'une conique à centre se compose, quand ella a un noeud, de deux feuilles, du même sens, quand il s'agit d'une podaire de l'ellipse (comp. le limaçon), de sens contraire, quand il s'agit d'une podaire de l'hyperbole (comp. la lemniscate de Bernoulli). Quand elle a un point isolé ou un rebroussement, la courbe a une aire au sens propre du mot. Ces deux derniers cas ont lieu lorsque le pôle se trouve dans l'intérieur de la conique ou sur la coniqne. Au premier cas, le pôle étant extérieur à la conique, on a pour aire de la podaire elliptique la somme des aires ordinaires des deux feuilles, pour la podaire hyperbolique leur différence.

Cela posé, on a pour l'équation cartésienne d'une podaire d'ellipse, le pôle étant pris pour origine des coordonnées:

$$(1)\qquad (x^2+y^2)^2+2(\alpha x+\beta y)(x^2+y^2)+(\alpha^2-a^2)x^2 + 2\alpha\beta xy+(\beta^2-b^2)y^2=0, \text{ [2]}$$

ou en coordonées polaires (ρ, ω):

$$(1*)\qquad \rho=-(\alpha\cos\omega+\beta\sin\omega)\pm\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\omega}. \text{ [3]}$$

---

[1] Dans la traduction allemande de la *Géométrie de position* de Carnot par Schumacher, t. II, pag. 362; voir aussi Möbius, *Der baryzentrische Kalkül*, p. 165; *Statik*, p. 45.

[2] Voir p e G. Loria, *Spezielle Kurven*, Leipzig, Teubner, 1902, p. 674/5.

[3] On obtient le plus aisément et directement cette équation polaire en se rappelant que, d'après Mr. F. Gomes Teixeira (*Ann. di mat.* (3) **11**, 1904, p. 18), toute quartique bicirculaire unicursale peut être construite comme cissoidale de deux circonférences, le pôle étant sur l'une de tes courbes: cela veut dire en ajoutant (ou soustrayant) les rayons vecteurs des deux circonférences. Si l'on prend l'axe polaire passant par le pôle et par le centre du deuxième cercle, on n'a qu'à identifier les coëfficients de l'équation ainsi obtenue avec ceux de l'équation (1*).

Pour obtenir l'équation polaire de la podaire hyperbolyque, il n'y a qu'à changer dans celle qui précède le signe de b^2.

Donc, on a pour l'aire de la *podaire elliptique*

$$U=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(\rho_1^2+\rho_2^2)\,d\omega$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(a^2-b^2+\alpha^2-\beta^2)\cos^2\omega+2\alpha\beta\sin\omega\cos\omega+(b^2+\beta^2)]\,d\omega$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}(a^2-b^2+\alpha^2-\beta^2)(1+\cos 2\omega)+\alpha\beta\sin 2\omega+(b^2+\beta^2)\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2)\,d\omega=\frac{1}{2}\pi(a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2),$$

car les autres intégrales, qui contiennent $\cos 2\omega$ et $\sin 2\omega$, s'annullent dans l'intervalle 0 à 2π.

De même, on a pour l'aire de la *podaire hyperbolique*

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\omega_0}^{+\omega_0}(\rho_1^2-\rho_2^2)\,d\omega\qquad\left[\sin\omega_0=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

$$=\int_{-\omega_0}^{+\omega_0}(\alpha\cos\omega+\beta\sin\omega)\sqrt{a^2-(a^2+b^2)\sin^2\omega}\,d\omega$$

$$=4\alpha\int_0^{\omega_0}\cos\omega\sqrt{a^2-(a^2+b^2)\sin^2\omega}\,d\omega,$$

car l'autre intégrale s'annule, et par conséquent

$$S = 2\alpha \left\{ \sin\omega \sqrt{a^2 - (a^2+b^2)\sin^2\omega} \right.$$

$$\left. + \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \arc\sin\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\sin\omega\right) \right\}_0^{\omega_0}$$

$$= \frac{a^2\alpha\pi}{\sqrt{a^2+a^2}}.$$

Le lieu d'un point (α, β), pour lequel l'aire de la podaire par rapport à une ellipse est une constante U, est donc une circonférence dont le centre coïncide avec celui de l'ellipse et dont le rayon est égal à $\left[\frac{2U}{\pi} - (a^2+b^2)\right]^{\frac{1}{2}}$; le lieu correspondant pour l'hyperbole est une parallèle à l'axe imaginaire située à la distance $\frac{S\sqrt{a^2+b^2}}{a^2\pi}$.

*

Quant aux podaires de la parabole, qui sont des cubiques circulaires unicursales, il n'est pas convenable de parler d'une aire de toute la courbe. Il est seulement intéressant d'examiner l'aire de la boucle, s'il y en a une, et en outre, pour les formes symétriques, l'aire entre la courbe et l'asymptote. Mais ces aires sont calculées dans le *Tratado de las curvas especiales notables* de Mr. F. Gomes Teixeira, Mem. Ac. Cienc. Madrid, t. xxii, 1905, aux pages 20 et 34, pour deux cas particuliers, et on obtient aisément la formule générale qui donne la quadrature des autres podaires de la parabole.

Spire, le 20 mars 1907.

BIBLIOGRAPHIA

H. LEBESGUE: *Leçons sur les séries trigonométriques*. Paris, Gauthier-Villars, 1906.

Faz este volume parte da importante collecção de *Monographies sur le théorie des fonctions* que é publicada em Paris sob a direcção do sr. BOREL, de muitas das quaes se deu já noticia n'estes *Annaes* e no *Jornal de sciencias mathematicas*. É consagrado á theoria das series trigonometricas e encerra as bellas lições que sobre este assumpto foram feitas pelo sr. LEBESGUE no collegio de França em 1904 a 1905. Os resultados mais importantes que sobre as series trogonometricas e, em particular, sobre as series de FOURIER téem sido obtidos pelos mais eminentes analystas que se téem occupado da sua theoria, são expostos n'estas lições debaixo de uma fórma extremamente elegante. Em uma introducção são primeiramente demonstradas as propriedades das funcções que é necessario conhecer para o estudo da theoria a que o livro é consagrado. Depois são considerados, no primeiro capitulo, os methodos para determinar os coefficientes das series trigonometricas que representam uma funcção dada; é exposta no segundo a theoria elementar das series de FOURIER; é consagrado o terceiro ao estudo da convergencia d'estas series, o quarto ao estudo das series de FOURIER divergentes, o ultimo ao estudo geral das series trigonometricas.

G. T.

L. OCTAVIO DE TOLEDO: *Introduction al estudio de las funciones de variable complexa*. Madrid, 1907.

Este livro é consagrado, como o titulo indica, á exposição dos principios da theoria das funcções de variavel complexa. Contém

tudo o que é primordial n'esta theoria, sem excessos nem lacunas, e algumas das suas applicações de maior interesse. A exposição dos assumptos é feita com a clareza, simplicidade e elegancia, como é indispensavel em livros para o primeiro estudo de qualquer theoria, a fim de attrahir para ella proselitos.

Os assumptos considerados n'este volume estão dispostos em onze capitulos. No primeiro é exposto e esclarecido com alguns exemplos simples o que é relativo á noção de funcção, á sua representação geometrica, á distincção entre funcções monodromas e polydromas. Os capitulos segundo e terceiro encerram os theoremas mais importantes da theoria das séries de termos complexos, constantes ou variaveis. A estes capitulos não segue a theoria dos productos infinitos; é porém appresentada em uma nota no fim do volume. O capitulo quarto é consagrado ao estudo das funcções elementares; vêem n'elle as theorias da exponencial, do logarithmo e das funcções circulares directas e inversa. O capitulo quinto é destinado ao estudo das derivadas das funcções de variavel complexa, a algumas indicacões sobre a representação conforme e sobre a representação dos imaginarios na esphera, etc. Os capitulos sexto e setimo são consagrados á theoria de Cauchy sobre os integraes curvilineos, e ás applicações d'esta theoria á determinação de alguns integraes definidos. Depois no capitulo oitavo e decimo é applicada a mesma theoria ao desenvolvimento das funcções em serie, sendo demonstradas no primeiro a formula de Taylor e a formula de Laurent, e no segundo as formulas de Lagrange, Fourier, e Bürmann. Nos capitulos nono e undecimo são estudadas as propriedades mais importantes das funcções holomorphas e meromorphas, entre as quaes estão incluidas as que se exprimem pelos bellos theoremas de Weierstrass e Mittag Leffler.

Ajuntaremos ao que precede que este livro é o primeiro de uma collecção que, debaixo do titulo de *Estudios de Analisis matematica*, o sabio professor da Universidade de Madrid tenciona consagrar á exposição sob forma elementar de alguns dos mais importantes assumptos de Analyse mathematica.

G. T.

H. MANDART: *Cours de Géométrie analytique à deux dimensions.* Namur, 1904.

N'este livro excellente, o auctor parte das primeiras noções de Geometria analytica, expõe depois a parte da theoria das conicas que é uso apresentar nos manuaes destinados ao primeiro estudo d'estas curvas, e finalmente sobe até ás questões mais especiaes e mais elevadas d'esta theoria que se encontram só nos grandes tratados; e tudo isto é feito de um modo extremamente simples, claro e elementar. Para expôr a referida theoria, são empregados successivamente os systemas de coordenadas cartesianas, polares, tangenciais e trilineares, e são applicados alguns theoremas geraes da Geometria projectiva. É tambem applicada, na ultima parte da obra, a theoria das fórmas ás bellas questões que se referem a feixes de conicas, redes de conicas, etc.

G. T.

P APPELL: *Cours de Mécanique à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales.* Paris, Gauthier-Villars, 1905.

O eminente auctor d'esta obra quiz interromper por algum tempo as suas altas investigações scientificas para ser util aos alumnos que pretendem iniciar o estudo de Mecanica racional. É motivo para lhe ser grato, porque dotou assim o primeiro ensino d'esta sciencia com um livro excellente, que é ao mesmo tempo a mais perfeita das introducções ao tratado magistral, bem conhecido, que consagrou á mesma sciencia.

O livro a que nos estamos referindo contém os assumptos de Mecanica exigidos pelos programmas actuaes dos cursos de Mathematicas especiaes, em França. Em uma introducção são expostos primeiramente os principios de Geometria vectorial, e em tres capitulos é exposta em seguida a Cinematica do ponto e do solido. Depois é estudada a Mecanica em sete capitulos, respectivamente consagrados ao movimento do ponto livre, á theoria do trabalho e da força viva, ao movimento do ponto não livre, á theoria dos momentos, ao equilibrio do ponto e dos systemas, ao equilibrio dos corpos solidos, e á theoria das machinas.

G. T.

P. Duhem: *Les origines de la Statique*, t. I. Paris, 1905.

O sabio auctor d'este livro estudou profundamente, para o escrever, as obras impressas e os manuscriptos dos fundadores da Statica, e reconheceu que nos escriptos que téem sido publicados sobre a historia d'esta sciencia, existem muitas affirmaões que não são exactas, e que a sciencia mecanica e physica decorre, por uma serie ininterrompida de aperfeiçoamentos apenas sensiveis, das doutrinas professadas nas escolas da edade média. A verdade d'esta these decorre da analyse profunda que o sr. Duhem faz da evolução d'estas sciencias. No presente volume é estudada esta evolução no periodo que vai desde Archimedes até ao seculo dezesete, sendo analysados os trabalhos de Aristoteles, Archimedes, Leonardo de Vinci, Jordanus, Guido Ubaldo, Galileu, Stevin, Roberval e Descartes, fazendo-se notar pela primeira vez a importancia das invenções de Jordanus.

Eis o objecto dos quatorze capitulos em que o livro está dividido:

I. Aristoteles e Archimedes. II. Leonardo de Vinci. III. Cardan. IV. Impossibilidade do movimento perpetuo. V. As fontes da Statica da edade média. VI, VII e VIII. Statica da edade média. IX. A escola de Jordanus no seculo dezeseis. X. A reacção contra Jordanus, Guido Ubaldo. XI. Galileu. XII. Stevin. XIII. e XIV. A Statica franceza. Roberval. Descartes.

G. T.

A. F. de Seabra: *Esboço monographico sobre os Scarabaeideos de Portugal (Coprini)*. Lisboa, 1907.

Pertence esta monographia a uma serie de estudos, publicados pela Direcção Geral de Agricultura, e realisados no laboratorio de pathologia vegetal, sobre os animaes uteis e nocivos á agricultura.

Estuda o auctor primeiramente a diagnose da familia dos Scarabaeidae, L. e indica a divisão d'esses Coleopteros segundo o regime das larvas, mostrando o interesse que taes classificações, ainda que incompletas teriam para a agricultura. Apresenta seguidamente as tabellas synopticas para a determinação dos gene-

ros, especies e variedades dos Scarabaeideos laparostictos de Portugal e, por fim, faz a descripção detalhada dos caracteres e habitos das especies do grupo Coprini. É um trabalho que interessa os entomologistas, e tambem de especial valor sob o ponto de vista da sciencia agricola.

O auctor baseia o seu trabalho sobre o exame dos exemplares da notavel collecção do museu de Coimbra, das collecções do museu de Lisboa, do gabinete de zoologia do Porto, de muitos exemplares fornecidos pelo distincto naturalista J. M. CORREIA DE BARROS, e d'outros, em grande numero, obtidos, ou directamente colhidos, de differentes pontos do paiz.

Ácerca de trabalhos anteriores diz-nos o sr. SEABRA «As obras mais importantes de que temos conhecimento sobre Coleopteros de Portugal, são o Catalogo do professor MANUEL PAULINO DE OLIVEIRA e aquelle que publicou CORREIA DE BARROS sobre as especies transmontanas. Varios naturalistas estrangeiros, taes como os condes de HOFFMANSEGG e DEJEAN, VUILLEFROY CASSINI, HEYDEN, PIOCHARD e CAMILLE VOLXEM percorreram algumas regiões do nosso paiz e publicaram trabalhos importantes, especialmente sobre os Cicindelideos e Carabideos, mas todo este material de um grande e incontestavel valor, quasi desapparece entre a multidão enorme das especies e variedades de typos que formam a ordem da classe dos insectos de que nos vamos occupar».

O sr. SEABRA já anteriormente tinha publicado duas monographias valiosas, uma ácerca do grupo dos Cetonideos, e outra com respeito á familia dos Platycerideos da fauna portugueza.

A. L.

MAXIMIANO LEMOS: *Amato Lusitano — a sua vida e a sua obra.* Porto, 1907.

O sr. dr. MAXIMIANO LEMOS que, com tão superior utilidade, tem versado a historia da medicina portugueza, consegue n'este seu livro sobre AMATO LUSITANO, apresentar, em notavel relevo, o vulto do eminente biographado, descrevendo ao mesmo tempo, com linguagem attrahente e facil, uma serie de quadros da vida movimentada e fecunda da renascença. Amato viveu em 1511 a 1568. N'essa epocha, uma das de maior interesse para a inves-

tigação erudita, effectuava-se nos estudos medicos, analogamente ao que se dava em outros ramos da actividade intellectual, uma profunda transformação. A materia medica enriquecia-se pelo conhecimento dos simplices que as novas, extensas regiões descobertas, em abundancia forneciam. Reconhecia-se a importancia fundamental da pratica das dissecções anatomicas e das autopsias. Observavam-se e descreviam-se com o possivel rigor os factos clinicos. Finalmente, com estes elementos, e em consequencia do grande desenvolvimento da cultura classica, podia fazer-se directamente e com criterio independente o estudo dos textos antigos, abandonando-se successivamente o campo estreito e as interpretações mais ou menos infieis da maioria dos commentadores das doutrinas galenicas.

Em todo o seu livro, o sr. **Maximiano Lemos** nos faz circumstanciadamente notar os conhecimentos de **Amato** sobre a historia natural medica, o seu cuidado em obter informações novas e rigorosas, com especialidade sobre as plantas da flora portugueza, e acerca dos productos do nosso então opulento dominio ultramarino. Mostrou-se além d'isto, **Amato**, um bom anatomico e excellente anatomo-pathologista, mas foi, sobretudo, tanto na esphera medica como na cirurgica, um dos máiores observadores clinicos do seu tempo, colhendo e expondo com exactidão os numerosos factos que observava. Houve na Renascença commentadores de grande erudição, notabilissimos clinicos e celebres anatomicos. Houve um pequeno numero de trabalhadores, «porém, que todos os elementos por que a Renascença se assignala, reunem. Um d'elles é **Amato Lusitano**.»

Em doze capitulos divide o sr. **Maximiano Lemos** a sua monographia. Nos onze primeiros é narrada a vida de **Amato** e os meios sociaes e scientificos em que o seu elevado espirito e constante actividade se desenvolveram e manifestaram. De Castello Branco, terra da sua naturalidade, foi **Amato Lusitano** para Salamanca, onde cursou os estudos medicos. Voltou depois a Portugal, mas pouco tempo aqui se póde demorar. A intolerancia religiosa, obrigando os judeus a sahir do paiz, lançou **Amato**, que sempre se conservou fiel á lei mosaica, em uma vida permanentemente cortada por incertezas e trabalhos. Por esse motivo, e por outros d'ordem profissional, percorreu um grande numero de paizes, estacionando em algumas cidades emquanto ahi podia encontrar um abrigo seguro.

É assim que por mais ou menos tempo se demorou em Anturpia, Ferrara, Veneza, Roma, Florença, Ancona, Pesaro, Ragusa e Salonica. Para bem, pois, se poderem comprehender as qualidades de espirito e o valor dos trabalhos de **Amato** necessario se tornava conhecer os costumes, os acontecimentos historicos d'aquelle tempo, o valor e os conhecimentos dos homens com quem **Amato** conviveu e que mais impressionaram a sua intelligencia, nos variados meios que successivamente frequentou. A avidez de cultura intellectual, a intolerancia religiosa, as paixões irrequietas da epocha, são elementos que em lucta permanente nos apparecem em uma serie de quadros pormenorisados que o sr. **Maximiano Lemos** traça com vigor e colorido, tendo sempre em vista patentear as diversas condições, principalmente as de ordem scientifica que tão profunda influencia exerceram no espirito e na vida do douto medico. É assim que o livro do sr. **Maximiano Lemos** tem qualidades para ser lido com muito interesse mesmo pelos mais avessos a esta ordem de estudos. Entre os trechos que mais especialmente alli ferem a nossa attenção, citaremos os que dizem respeito á historia da fundação e desenvolvimento de Castello Branco, ao ensino e habitos universitarios de Salamanca, á Casa de Portugal em Anturpia, aos factos de messianismo do capitulo viii, ás controversias de Mattioli, ao alto e protector valimento de José Nasci. Dá-nos o sr. **Maximiano Lemos** esboços biographicos dos principes que acolheram **Amato** e dos homens de sciencia com quem mais directamente tratou. São particularmente instructivas para a historia da medicina as relações de **Amato** com Alderete, Brasavola e Canani.

O duodecimo e ultimo capitulo é exclusivamente destinado ao exame e critica dos trabalhos scientificos de **Amato**. O sr. **Maximiano Lemos** faz a synthese do seu livro nas seguintes linhas, com as quaes fecha a monographia, dando todo o realce aos meritos do seu notavel biographado:

«Erudito, conhece sete linguas: o grego, o latim, o hebreu, o allemão, o francez, o italiano e o hespanhol, além da sua propria, e isto permitte-lhe commentar **Dioscorides** com profundo conhecimento do texto e dos seus differentes interpretadores; clinico, ahi estão as 700 curas da sua pratica a attestar os seus meritos de observador; anatomico, deixamos provado que a elle se deve em grande parte a descoberta das valvulas das veias. É

por isso que Malgaigne, o grande cirurgião francez, se lhe refere nestes termos: «Quanto a Portugal, tinha produzido um grande observador que levara de vencida com exito quasi egual a medicina e a cirurgia, Rodrigues de Castello Branco, que do nome da sua ingrata patria adoptou o nome de Amato Lusitano».

A. L.

SUR UNE APPLICATION DE LA THÉORIE DE LA FONCTION

$$R(w, s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(w+\nu)^s}$$

PAR

M. Lerch

Professeur à l'École Polytechnique de Brünn

La série qui figure au titre est convergente tant que la partie réelle de s reste plus grande que un; mais la fonction qu'elle définit existe dans tout le plan de la variable s, où elle n'a d'autre point singulier à distance finie que le point $s = 1$.

Pour les valeurs réelles et positives, suffisamment grandes, de la variable w, on connaît le développement demi convergent de notre fonction, savoir (¹)

$$(1) \qquad R(w,s) = \frac{1}{(s-1)\,w^{s-1}} + \frac{1}{2w^s} + \sum_{\nu=1,2,\ldots} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{2\nu} \binom{s+2\nu-2}{2\nu-1} \frac{1}{w^{s+2\nu-1}}.$$

(¹) Les lettres $B_1, B_2, B_3, \ldots$ désignent les nombres bernoulliens positifs $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \ldots$

La différence entre les deux membres, le second étant arrêté au terme de rang p, est une intégrale définie bien connue; cette circonstance permet de prouver l'exactitude des formules obtenues par différentiations, ainsi que d'introduire les valeurs complexes de w. Sans m'arrêter à ces questions que j'avais suffisamment traitées dans quelques-uns de mes mémoires, je vais montrer comment on arrive, à l'aide du développement (1), aux valeurs asymptotiques de certaines expressions.

Elles naissent de l'identité évidente

$$R(w, s) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{(w+\nu)^s} + R(w+n, s) \tag{2}$$

qui donne

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{(w+\nu)^s} = R(w, s) - R(w+n, s), \tag{2a}$$

et dont on tire les valeurs des sommes telles que

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{[\log(w+\nu)]^p}{(w+\nu)^s},$$

en prenant p fois la dérivée par rapport à s.

Je veux me borner à considérer le cas de $w = 1$, en changeant n en $n-1$, ce qui donne l'identité

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^{-s} = \zeta(s) - R(n, s), \tag{2b}$$

$\zeta(s)$ étant, suivant l'habitude, la fonction ainsi désignée par Riemann; une différentiation par rapport à s donne

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^{-s} \log \nu = R'(n, s) - \zeta'(s). \tag{2c}$$

Lorsque n surpasse quelque limite, les quantités $R(n, s)$ et

$R'(n, s)$ se calculent a l'aide de la formule (1) et de sa dérivée en s,

$$(3)\quad R'(w, s) = -\frac{1}{(s-1)^2 w^{s-1}} - \frac{\log w}{(s-1)\, w^{s-1}} - \frac{\log w}{2w^s}$$

$$+\sum_{\nu=1,2,3\ldots} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{2\nu \,.\, w^{s+2\nu-1}} \left[\varphi_\nu(s) - \binom{s+2\nu-2}{2\nu-1} \log w\right],$$

où j'ai posé pour abréger

$$\varphi_\nu(s) = \binom{s+2\nu-2}{2\nu-1} \sum_{\mu=0}^{2\nu-2} \frac{1}{s+\mu},$$

ce qui est un polynome, dérivée de la fonction

$$\binom{s+2\nu-2}{2\nu-1}.$$

Je veux développer de plus près la combinaison des formules ($2b$) et ($2c$) qui résulte en retranchant de ($2c$) la formule ($2b$) multipliée par $\log n$:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-s} \log \frac{\nu}{n} = R'(n, s) + R(n, s) \log n - \zeta'(s) - \zeta(s) \log n.$$

Il vient le développement demi convergent

$$(4)\quad \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-s} \log \frac{\nu}{n} = -\zeta'(s) - \zeta(s) \log n - \frac{1}{(s-1)^2 n^{s-1}}$$

$$+\sum_{\nu=1,2,3\ldots} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu \varphi_\nu(s)}{2\nu\, n^{s+2\nu-1}}.$$

Ce résultat répond à la question 1069 de l'*Intermédiaire des mathématiciens* proposée en 1897 (p. 122) et reproduite dans le dernier numéro d'avril de l'année courante 1907.

L'auteur anonyme de la question *(Rosace)*, l'a posée sous la forme

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{1^k}\left(\frac{2}{n}\right)^{2^k}\left(\frac{3}{n}\right)^{3^k}\cdots\left(\frac{n}{n}\right)^{n^k};$$

il est évident que notre expression (4) en donne le logarithme, si l'on fait $s=-k$.

Dans la forme proposée par son auteur, la formule à établir contient une inexactitude, et il a fallu établir, aussi par cette raison, notre développement (4), pour obtenir une formule correcte.

Le véritable germe de la dite question consiste dans la recherche des constantes, qui sont ici données dans toute généralité à l'aide des quantités $\zeta(s)$ et $\zeta'(s)$; on sait que l'on a $\zeta(s)=0$ pour s pair et négatif, et en vertu d'une relation attribuée à Riemann, on vérifie la formule connue

$$\zeta(1-2\mu)=(-1)^{\mu}\frac{B_\mu}{2\mu},$$

$$\left(\zeta(-1)=-\frac{1}{12},\quad \xi(-3)=\frac{1}{120},\ \ldots\right).$$

Quant au calcul des quantités $\zeta'(-1)$, $\zeta'(-2)\ldots$, on les tire de la formule (4), en y prenant $n=5$ ou $n=10$, suivant l'approximation qu'on cherche.

Par exemple pour $s=-1$ on a

$$\varphi_1=1,\quad \varphi_\nu(-1)=-\frac{1}{(2\nu-1)(2\nu-2)},$$

et la formule (4) donne

$$-\zeta'(-1)=\sum_{\nu=1}^{n}\nu\log\frac{\nu}{n}-\frac{\log n}{12}+\frac{n^2}{4}$$

$$-\left\{\frac{B_1}{2}+\frac{B_2}{4.3.2\,n^2}-\frac{B^3}{6.5.3\,n^4}+\ldots\right\}.$$

En prenant $n=5$, j'obtiens

$$-\zeta'(-1)=0{,}165421.$$

On a de même pour $-\zeta'(-2)$ l'expression

$$\sum_1^n \nu^2 \log \frac{\nu}{n} + \frac{n^3}{9} - \frac{n}{12} + \frac{2\,B_2}{4.3.2.1.n} - \frac{2\,B_3}{6.5.4.3\,n^3} + \frac{2\,B_4}{8.7.6.5\,n^5} - \ldots$$

où l'on prend $n = 5$ pour obtenir 8 chiffres exactes.

Notons que la formule de Riemann

$$\zeta(s) = 2 \sin \frac{s\pi}{2} \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \zeta(1-s)$$

permet de conclure

$$\zeta'(-2\mu) = (-1)^\mu \frac{(2\mu)!}{2(2\pi)^{2\mu}} \left[1 + \frac{1}{2^{2\mu+1}} + \frac{1}{3^{2\mu+1}} + \ldots\right]$$

$$\zeta'(-2\mu+1) = (-1)^\mu \frac{B_\mu}{2\mu} \left[\log(2\pi) - \psi(2\mu) - \frac{\zeta'(2\mu)}{\zeta(2\mu)}\right],$$

où

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

Ces formules donnent la valeur explicite de la constante A dans la formule de *Rosace*.

On ne s'étonnera pas que le cas de $s = 0$ reproduise une formule de Stirling; car on a

$$\underset{s=0}{R'}(w, s) = \log \frac{T(w)}{\sqrt{2\pi}},$$

de sorte que la série demi convergente de Stirling est comprise dans la formule (1); celle-ci reproduit aussi, pour $s = -n$, le développement du polynome de Bernoulli

$$S_n(w), \quad \text{où} \quad S_n(w+1) - S_n(w) = w^n,$$

suivant les puissances de w.

Ces faits sont connus depuis longtemps; grâce à eux, quelques géomètres appelaient *fonction bernoullienne* la fonction que je désigne par $R(w, s)$.

SOBRE A CONSTRUCÇÃO DO CIRCULO OSCULADOR DAS CUBICAS CIRCULARES E DAS QUARTICAS BICIRCULARES

POR

F. Gomes Teixeira

I

A construcção do circulo osculador das cubicas circulares (1) pode ser feita por um processo que se deduz immediatamente do theorema seguinte:

Se um circulo (C) *corta uma cubica circular em quatro pontos* A, B, C *e* D, *as rectas* AB *e* CD *cortam a cubica em dois novos pontos* E *e* F, *taes que a recta* EF *é parallela á asymptota real da cubica.*

As rectas BC *e* AD *determinam dois outros pontos que gozam da mesma propriedade, assim como as rectas* CA *e* BD.

Este theorema é muito conhecido. Pode vêr-se uma demonstração d'elle na obra de Basset intitulada: *An elementary Treatrise on cubic and quartic curves* (Cambridge, 1901), e uma outra, mais elementar, em um artigo que publicámos no volume da *Revista trimestral de Matematicas* (Zaragoza, t. IV) (2).

Para construir por meio d'este theorema o circulo osculador

(1) Veja-se a theoria d'estas curvas no nosso *Tratado de las curvas especiales notables* (Madrid, 1905, pag. 35).

(2) Veja-se o tom. II das nossas *Obras sobre Mathematica*, pag. 344.

da cubica dada em um qualquer dos seus pontos, notemos que, se os pontos B e C coincidem com A, o circulo torna-se osculador da curva e a recta AB torna-se tangente á mesma curva no ponto A, e que então esta tangente e a recta CD cortam a cubica em dois novos pontos E e F, taes que a recta EF é parallela á sua asymptota. Se traçarmos pois a tangente á cubica no ponto A, e em seguida pelo ponto E, em que esta recta corta a mesma cubica, uma paralleta á asymptota, e pelo ponto F, onde esta ultima recta encontra a mesma cubica, a recta AF, obtem-se, pela intersecção de AF com a cubica, o ponto D onde o circulo osculador procurado corta a curva dada.

II

A construcção do circulo osculador das quarticas bicirculares pode ser feita por um processo que se deduz do theorema relativo ás cubicas circulares que vem de ser enunciado, pelo methodo da transformação por meio de raios vectores reciprocos, como vamos vêr.

Consideremos uma quartica bicircular qualquer K_1, e refira-se a dois eixos coordenados rectangulares que passem por um ponto O da curva. A sua equação tem então a fórma [1]:

$$(x^2+y^2)^2+(ax+by)(x^2+y^2)+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=0.$$

Pondo n'esta equação

$$x=\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2},\quad y=\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2},$$

vem a seguinte:

$$(Dx_1+Ey_1)(x_1^2+y_1^2)+Ax_1^2+Bx_1y_1+Cy_1^2+ax_1+by_1+1=0,$$

que representa uma cubica circular K, cuja asymptota real é parallela á tangente em O á quartica dada.

---

(1) *Tratado de las curvas especiales notables*, pag. 175.

Consideremos agora um circulo (C_1), e sejam A_1, B_1, C_1 e D_1 os pontos em que corta a quartica bicircular dada, A, B, C e D os pontos correspondentes da cubica inversa e (C) o circulo inverso de (C_1). Ás rectas AB e CD do plano da cubica correspondem os circulos do plano da quartica que passam, respectivamente, pelos pontos O, A_1 e B_1, e pelos pontos O, C_1 e D_1. Cada um d'estes circulos corta ainda a quartica em um ponto; e os dois pontos E_1 e F_1, que assim se determinam, correspondem aos pontos E e F da cubica acima mencionada.

Notando agora que ás rectas do plano da cubica parallelas á asymptota correspondem circulos tangentes á quartica no ponto O, vê-se que á recta EF corresponde um circulo que passa por E_1 e F_1 e que é tangente em O á quartica.

Podemos pois enunciar o theorema seguinte, que julgamos novo:

Se um circulo (C) *corta uma quartica bicircular em quatro pontos* A_1, B_1, C_1 e D_1, *o circulo que passa por* A_1, B_1 *e por um ponto fixo* O *da curva e o circulo que passa pelos pontos* C_1, D_1 *e* O *cortam a quartica em dois novos pontos* E_1 *e* F_1, *taes que o circulo que passa por elles e por* O *é tangente n'este ponto áquella curva.*

Os circulos que passam por B_1, C_1 *e* O *e por* A_1, D_1 *e* O *gozam da mesma propriedade, assim como os circulos que passam por* C_1, A_1, *e* O, *e por* B_1, D_1 *e* O.

Do theorema que precede deduzem-se os corollarios seguintes:

1.° Se o circulo (C_1) é tangente á quartica em A_1 e a corta em C_1 e D_1 (isto é, se A_1 e B_1 coincidem), o circulo que passa por O e é tangente á quartica em A_1, e o circulo que passa por O, C_1 e D_1 cortam aquella quartica em dois pontos E_1 e F_1, taes que o circulo que passa por elles e por O é tangente á quartica n'este ponto.

2.° Se (C_1) é tangente á quartica em dois pontos A_1 e C_1 (isto é, se A_1 coincide com B_1 e C_1 coincide com D_1), os dois circulos que são tangentes á quartica em A_1 ou C_1 e que passam por O cortam esta curva em dois pontos E_1 e F_1, taes que o circulo que passa por elles e por O é tangente á quartica n'este ponto.

3.° Se o circulo (C_1) é osculador da quartica no ponto A_1 (isto é, se os pontos A_1, B_1 e C_1 coincidem) e a corta em D_1, o circulo que é tangente a esta quartica em A_1 e passa por O e

o circulo que passa por O, A_1 e D_1 cortam a quartica em dois novos pontos E_1 e F_1, taes que o circulo que passa por elles e por O é tangente á quartica n'este ponto.

Fundados n'este ultimo corollario podemos determinar facilmente o circulo osculador de uma quartica dada em um ponto A_1 tambem dado. Basta, para isso, traçar um circulo tangente á quartica no ponto A_1, que passe por um ponto qualquer O d'esta curva, e depois um outro que passe pelo ponto E_1, em que o primeiro corta a quartica, e que seja tangente em O a esta curva. Este ultimo circulo corta a quartica em um novo ponto F_1, e o circulo que passa por F_1 e é tangente em O á quartica corta esta curva em um novo ponto D_1. Traçando um circulo que passe por D_1 e seja tangente em A_1 á quartica obtem-se o circulo osculador pedido.

III

O methodo para a determinação do circulo osculador das cubicas circulares e das quarticas bicirculares que vem de dar-se não é applicavel aos pontos nodaes d'estas curvas. Mas pode-se obter o raio de curvatura da curva n'estes pontos ou por meio do methodo exposto pelo Sr. G. Loria na pagina 131 d'este volume dos *Annaes*, ou por meio da analyse seguinte.

Consideremos primeiramente as cubicas circulares e recordemos que todas a cubica circular unicursal pode ser considerada como *cissoide* d'um circulo relativamente a uma recta dada (*l. c.*, pag. 50), e que, suppondo o circulo e a recta representados pelas equações

$$x^2+y^2-2(\alpha x+\beta y)=0, \quad x=c,$$

a equação d'estas cubicas é (*l. c.*, pag. 12)

$$x(x^2+y^2)=c(x^2+y^2)-2(\alpha x+\beta y),$$

e portanto, em coordenadas polares

$$\rho^2\cos\theta-c\rho+2(\alpha\cos\theta+\beta\operatorname{sen}\theta)=0.$$

Posto isto, tomemos a expressão geral do raio de curvatura

$$R = \frac{\left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 - \rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + 2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}$$

e notemos que o ponto duplo da curva, isto é, o ponto que se quer estudar, coincide com a origem das coordenadas e que temos portanto n'este ponto $\rho = 0$, e, como consequencia,

$$R = \frac{1}{2}\frac{d\rho}{d\theta}.$$

Applicando esta formula á equação polar da cubica, vem a seguinte:

$$R = \frac{\alpha \operatorname{sen} 2\theta_0 - \beta \cos 2\theta_0}{\cos \theta_0},$$

onde se deve substituir θ_0 pelos valores dos angulos que formam com o eixo das abscissas as tangentes á curva no ponto duplo.

É facil de ver que podemos ainda escrever

$$R = a \frac{\operatorname{sen}(2\theta - \omega)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\pi - \theta_0)},$$

ω representando o angulo formado pelo vector do centro do circulo dado com o eixo das abscissas e a o seu raio.

Pode-se ainda deduzir d'esta expressão de R uma outra que vae vêr-se.

Sejam C o centro do circulo considerado, A um dos pontos em que a recta dada encontra o circulo, O o ponto duplo da cubica, F o ponto onde a recta AC corta a perpendicular OX á recta dada e E o novo ponto em que ella encontra o circulo e D o novo ponto em que OX corta o mesmo circulo. A tangente em O a um dos arcos da cubica que se cortam em O é OA, e a

normal correspondente é OE, e temos $AOX = \theta_0$, $COX = -\omega$, e portanto

$$OFE = CFD = ACD - CDF = 2\theta_0 - \omega, \quad FOE = \frac{\pi}{2} - \theta_0;$$

logo o valor do raio de curvatura d'este arco, no ponto O, é dado pela formula

$$R = a\frac{OE}{FE}.$$

IV

Consideremos agora o ponto duplo real das quarticas bicirculares unicursaes.

Estas curvas são identicas ás podares da ellipse e da hyperbole e, suppondo que a equação d'estas conicas é

$$\frac{(x-m)^2}{A} + \frac{(y-n)^2}{C} = 1,$$

(m, n) sendo as coordenadas do centro, a equação cartesiana das quarticas correspondentes é

$$(x^2 + y^2 - mx - ny)^2 = Ax^2 + Cy^2,$$

e portanto a equação polar das mesmas curvas é

$$(\rho - m\cos\theta - n\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 = A\cos^2\theta + C\,\mathrm{sen}^2\theta.$$

Posto isto, appliquemos a esta equação a formula

$$R = \frac{1}{2}\frac{d\rho}{d\theta}.$$

Vem

$$R = \frac{1}{2}(n\cos\theta - m\,\mathrm{sen}\,\theta) - \frac{(C-A)\,\mathrm{sen}\,2\theta}{4(m\cos\theta + n\,\mathrm{sen}\,\theta)},$$

onde se deve substituir θ pelos valores dados pela equação

$$(m \cos\theta + n \operatorname{sen}\theta)^2 = A \cos^2\theta + C \operatorname{sen}^2\theta,$$

ou

$$(C - n^2) \operatorname{tang}^2\theta - 2mn \operatorname{tang}\theta + A - m^2 = 0.$$

Representando por (r, ω) as coordenadas polares do centro da conica, pode-se dar ainda á expressão de R a forma seguinte:

$$R = \frac{1}{2} r \operatorname{sen}(\omega - \theta) + \frac{(A - C) \operatorname{sen} 2\theta}{4 \cos(\theta - \omega)}.$$

V

Passando outra vez a considerar os circulos osculadores das cubicas circulares, vamos generalisar a todas estas cubicas duas propriedades da cissoide e da strophoide demonstradas por **Balitrand** e **Valdés** nos *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1893 e 1894). Esta generalisação parece-nos não ter sido ainda notada.

1.º *Os circulos osculadores de uma cubica circular qualquer, correspondentes a quatro pontos da curva situados sobre a circumferencia de um circulo, cortam a mesma cubica em quatro novos pontos, situados tambem sobre a circumferencia de um circulo.*

Sabe-se que as coordenadas de qualquer cubica não unicursal podem ser representadas por funcções ellipticas meromorphas e dos mesmos periodos de um paramento u [1], e que os valores que toma u nos pontos de intersecção com uma recta satisfazem á condição

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + u_3 = c + 2k_1 \omega_1 + 2k_2 \omega_2,$$

$2\omega_1$ e $2\omega_2$ representando os dois periodos das funcções ellipticas

(1) Veja-se, por exemplo, o nosso *Curso de Analyse infinitesimal* (Calculo integral, 2.ª parte, 1892, pagg. 245 e 254).

consideradas, c uma quantidade que não varia quando a recta varia, k_1 e k_2 dois numeros inteiros que podem variar com a recta. Os valores que toma u nos pontos de intersecção com uma conica satisfazem á condição

$$(2) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_6 = 2c + 2k_1\omega_1 + 2k_2\omega_2.$$

Sabe-se tambem que, se estas condições forem satisfeitas, os tres pontos no primeiro caso e os seis pontos no segundo caso estão, respectivamente, sobre uma recta ou sobre uma conica.

Posto isto, se a cubica proposta for circular e se representarmos por u'_1 o valor que toma u no ponto onde o circulo osculador em u_1 corta a cubica e por u_5 e u_6 os valores que toma u nos pontos circulares do infinito, temos

$$3u_1 + u'_1 + u_5 + u_6 = 2c + \ldots$$

Do mesmo modo, representando por u'_2, u'_3 e u'_4 os valores que toma u nos pontos em que os circulos osculadoras da cubica nos pontos correspondentes a u_2, u_3 e u_4 cortam a curva, temos

$$3u_2 + u'_2 + u_5 + u_6 = 2c + \ldots$$
$$3u_3 + u'_3 + u_5 + u_6 = 2c + \ldots$$
$$3u_4 + u'_4 + u_5 + u_6 = 2c + \ldots$$

Logo

$$3(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + u'_1 + u'_2 + u'_3 + u'_4 + 4(u_5 + u_6) = 8c + \ldots,$$

ou, em virtude da relação (2),

$$u'_1 + u'_2 + u'_3 + u'_4 + u_5 + u_6 = 2c + \ldots$$

Os pontos correspondentes a u'_1, u'_2, u'_3 e u'_4 estão pois collocados sobre uma conica que passa pelos pontos circulares do infinito, e que portanto é um circulo.

A demonstração precedente não é applicavel ás cubicas circulares unicursaes, mas o theorema pode extender-se facilmente a estas cubicas, notando que toda a cubica d'esta natureza é a transformada homographica de uma cissoide ou de uma strophoide, ou ainda notando que estas cubicas são limites de cubicas circulares não unicursaes.

2.° *Os circulos osculadores de uma cubica circular em tres pontos, situados sobre uma recta, cortam a curva em tres novos pontos, situados sobre uma circumferencia que passa pelo ponto onde a cubica é cortada pela asymptota real.*

Com effeito, representando, como no caso do theorema precedente, por u'_1, u'_2 e u'_3 os valores que toma u nos pontos onde os tres circulos osculadores cortam a cubica e por u_5 e u_6 os valores que toma u nos pontos circulares do infinito, temos

$$3u_1 + u'_1 + u_5 + u_6 = 2c + \ldots$$

$$3u_2 + u'_2 + u_5 + u_6 = 2c + \ldots$$

$$3u_3 + u'_3 + u_5 + u_6 = 2c + \ldots,$$

e portanto, em virtude de (1),

$$u'_1 + u'_2 + u'_3 + 3(u_5 + u_6) = 3c + \ldots$$

Mas, por outra parte, se u'' representa o valor que toma u nos pontos onde a recta que passa pelos pontos circulares do infinito corta a cubica, temos

$$u'' + u_5 + u_6 = c + \ldots,$$

e, representando por u''' os valores que toma u no ponto em que a asymptota real corta a curva,

$$2u'' + u''' = c + \ldots$$

Resulta d'estas relações a seguinte:

$$u'_1 + u'_2 + u'_3 + u''' + u_5 + u_6 = 2c + \ldots,$$

a qual mostra que os pontos onde u toma os valores u'_1, u'_2, u'_3 e u''' estão situados na circunferencia de um circulo.

O theorema que vem de ser demonstrado tem tambem logar no caso das quarticas bicirculares, como vamos vêr.

As quarticas bicirculares não unicursaes teem dois pontos duplos, e o seu *genero* é portanto egual á *unidade*. As coordenadas dos seus pontos podem pois ser expressas por funcções ellipticas meromorphas e dos mesmos periodos de um parametro u, e é condição necessaria e sufficiente para que quatro dos seus pontos estejam sobre a circumferencia de um circulo que seja

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + 2(u_5 + u_6) = 2c + \ldots,$$

u_1, u_2, u_3 e u_4 sendo os valores que tome u nos pontos de intersecção da curva com o circulo, u_6 e u_6 os valores que toma u nos pontos circulares do infinito, e c uma quantidade independente da posição do circulo.

Representando por u'_1 o valor que toma u no ponto em que o circulo osculador correspondente ao ponto u_1 corta a curva, temos

$$3u_1 + u'_1 + 2(u_5 + u_6) = 2c + \ldots$$

Do mesmo modo, para os circulos osculadores nos pontos correspondentes a u_2, u_3 e u_4, temos

$$3u_2 + u'_2 + 2(u_5 + u_6) = 2c + \ldots$$

$$3u_3 + u'_3 + 2(u_5 + u_6) = 2c + \ldots$$

$$3u_4 + u'_4 + 2(u_5 + u_6) = 2c + \ldots$$

Resulta d'estas relações a seguinte:

$$u'_1 + u'_2 + u'_3 + u'_4 + 2(u_5 + u_6) = 2c + \ldots,$$

a qual mostra que os pontos correspondentes a u'_1, u'_2, u'_3 e u'_4 estão situados sobre um circulo.

VI

Os theoremas enunciados nos paragraphos I e II podem tambem ser demonstrados facilmente por meio das funcções ellipticas.

Consideremos primeiramente o caso em que a curva dada é uma cubica circular. Os valores que u toma nos pontos A, B, C e D em que esta cubica é cortada por um circulo satisfazem á condição

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 2c + \ldots$$

e os valores u'_1 e u'_2, que u toma nos pontos em que a mesma cubica é cortada pelas rectas AB e CD, satisfazem a estas outras:

$$u_1 + u_2 + u'_1 = c + \ldots$$
$$u_3 + u_4 + u'_2 = c + \ldots$$

Mas a recta que passa pelos pontos circulares do infinito corta a cnbica no mesmo ponto em que ella é cortada pela asymptota real, e portanto temos, representando por u'' o valor que toma u n'este ultimo ponto,

$$u'' + u_5 + u_6 = c + \ldots$$

De todas estas equações resulta a seguinte

$$u'' + u'_1 + u'_2 = c + \ldots,$$

a qual mostra que as rectas AB e CD cortam a curva em dois pontos collocados sobre uma recta parallela á asymptota real. O theorema do paragrapho I está pois demonstrado.

Consideremos agora uma quartica bicircular.

Os valores que agora toma u nos pontos A, B, C e D de intersecção da curva com um circulo satisfazem á condição

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + 2(u_5 + u_6) = 2c + \ldots$$

visto os pontos circulares do infinito serem n'este caso duplos.

Representando por u' e u'_1 os valores que toma u nos pontos O e E em que a quartica é cortada por um circulo que passe por A e B, temos tambem

$$u_1 + u_2 + u' + u'_1 + 2(u_5 + u_6) = 2c + \ldots$$

Do mesmo modo temos, representando por u'_2 o valor que toma u no ponto F em que a quartica é cortada por um circulo que passe por C, D e O, temos

$$u_3 + u_4 + u' + u'_2 + 2(u_5 + u_6) = 2c + \ldots$$

Resulta d'estas tres equações a seguinte:

$$2u' + u'_1 + u'_2 + 2(u_5 + u_6) = 2c + \ldots,$$

a qual mostra que o circulo que passa por E e F corta a quartica em dois pontos coincidentes, e que é portanto tangente a esta curva.

As demonstrações que precedem não mostram se os theoremas enunciados subsistem no caso das cubicas circulares e das quarticas bicirculares unicursaes. Mas pode-se mostrar por meio de considerações simples, fundadas em que se pode passar de uma cubica circular ou de uma quartica bicircular não unicursal para uma cubica ou uma quartica bicircular unicursal fazendo variar de uma maneira continua a primeira curva.

VII

O theorema relativo ás quarticas bicirculares demonstrado no paragrapho II é tambem applicavel ás cubicas circulares. Pode-se demonstrar isto pelo methodo empregado para o deduzir do theorema demonstrado no paragrapho I. Pode tambem deduzir-se directamente, como vamos vêr.

Sendo, como precedentemente, u_1, u_2, u_3 e u_4 os valores que toma u nos pontos de intersecção A, B, C e D da cubica com um circulo, temos

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 2c + \ldots$$

Temos tambem, para um circulo que passe por A e B e corte a cubica em O e E,

$$u_1 + u_2 + u' + u'_1 + u_5 + u_6 = 2c + \ldots$$

u' representando o valor que toma u no ponto O e u'_1 o valor que toma esta variavel no ponto E; e para um circulo que passe por C, D e O e corte a curva em F,

$$u_3 + u_4 + u' + u'_2 + u_5 + u_6 = 2c + \ldots$$

Vem pois a relação

$$2u' + u'_1 + u'_2 + u_5 + u_6 = 2c + \ldots$$

da qual se deduz *que o circulo que passa por* E *e por* F *é tangente á cubica considerada no ponto* O.

Convem observar que o theorema enunciado no paragrapho I é um limite do que vem de ser demonstrado, correspondente ao caso de O estar no infinito sobre a asymptota real da cubica. A demonstração que vem de ser empregada torna isto evidente. Com effeito, se o ponto O está collocado sobre a recta do infinito, isto é, sobre a recta que passa pelos pontos circulares do infinito, temos

$$u' + u_5 + u_6 = c + \ldots,$$

e portanto a ultima relação dá

$$u' + u'_1 + u'_2 = c + \ldots,$$

o que mostra qne os pontos E e F estão situados em uma recta que encontra a asymptota real no infinito.

VIII

Os theoremas precedentes podem ser generalisados por transformação homographica, procedendo como em um artigo que

publicámos nos *Niew Archief voor Wiskunde* de Amsterdam (2.ª série, t. VII). Obtêem-se assim os theoremas seguintes:

1.° As conicas que passam por dois pontos A_1 e A_2 de uma cubica qualquer e têem um contacto de segunda ordem com esta curva em um dos quatro pontos em que ella é cortada por uma conica que passe por A_1 e A_2, cortam a mesma cubica em quatro novos pontos, situados tambem sobre uma conica que passa por A_1 e A_2.

2.° As tres conicas que passam por dois pontos A_1 e A_2 de uma cubica qualquer e que têem um contacto de segunda ordem com esta curva em tres pontos respectivos, situados sobre uma recta, cortam a cubica em tres novos pontos, situados sobre uma conica que passa por A_1 e A_2 e pelo ponto em que a cubica é cortada pela tangente no ponto de intersecção d'esta curva com a recta A_1A_2.

3.° Se uma conica corta uma cubica nos pontos A_1, A_2, A, B, C e D, as rectas AB e CD cortam a mesma cubica em dois novos pontos E e F, taes que a recta EF passa pelo terceiro ponto de intersecção de A_1A_2 com a cubica.

4.° Se uma conica corta uma cubica nos pontos A_1, A_2, A, B, C e D, a conica que passa por A_1, A_2, A, B e um outro ponto O da cubica, e a conica que passa pelos pontos A_1, A_2, C, D e O cortam a cubica em dois novos pontos E e F, taes que a conica que passa A_1, A_2, E e F é tangente á cubica no ponto O.

5.° Se uma conica passa pelos dois nodos A_1 e A_2 de uma quartica binodal e corta a mesma quartica nos pontos A, B, C e D, a conica que passa por A_1, A_2, A, B e um novo ponto O da quartica e a conica que passa por A_1, A_2, C, D e O cortam a quartica em dois novos pontos E e F collocados em uma conica que passa A_1 e A_2 e é tangente á quartica no ponto O.

O CAPITALISMO E AS SUAS ORIGENS EM PORTUGAL

POR

BENTO CARQUEJA

(Conclusão)

Seculo XVII

O alvorecer do seculo XVII foi caracterisado por politica de pacificação, porque a Filippe II escasseiavam já os recursos para sustentar guerras assoladoras. Em agosto de 1604, firmava-se o tratado de paz com a Inglaterra; em 1609, ajustava-se a tregua com as provincias unidas dos Paizes Baixos. E bem precisa se tornára essa politica pacifica, porque a situação da fazenda publica chegára á ultima penuria.

Depois dos rendimentos das alfandegas, do das sizas e do dos contractos e almoxarifados, as receitas de maior valor derivavam do commercio e da navegação da Asia; mas essas mesmas estavam reduzidas, porque os mares andavam infestados pelos inglezes e hollandezes.

Todos os impostos e monopolios haviam sido arrendados e os arrematantes não pagavam, ás vezes, nem metade dos preços ajustados. A India gastava muito; o Brazil requeria soccorros, que não compensava, e as despezas extraordinarias excediam, todos os annos, quasi no dobro, os suppostos excedentes das contadorias officiaes. Os juros e os cambios das antecipações contrahidas nas praças de Flandres e da Italia, os sacrificios já

bastante superiores ás forças exigidas pelos presidios e pelas armadas e os naufragios e apresamentos repetidos de navios e de carregamentos preciosos, nas viagens de ida e volta da Asia e da America, obrigavam o thesouro a empenhar os melhores rendimentos, a fechar os olhos á má fé dos contratadores e a acceitar como favores as condições dictadas pelos argentarios nacionaes e estrangeiros (1).

Todavia, alguns negocios produziam lucros fabulosos. Refere SOMBART que cinco navios portuguezes que chegaram á Hollanda, em 1663, com uma carga valendo 600:000 florins, a venderam por 2.000:000 florins. Em 1697, um carregamento avaliado em 5.000:000 florins foi vendido por 20.000:000 florins. A companhia Neerlandeza das Indias lucrava, em media, 142 % em Ceylão, 172 % em Malabar, 40 a 50 % em Malaca (2).

O erario portuguez estava, porém, exhausto; lançava-se mão de tributos para supprir as necessidades imperiosas. Pelo alvará de 5 de setembro de 1641 foi ordenado que todas as pessoas, sem excepção alguma, nem privilegio, pagassem, cada anno, a decima parte dos seus rendimentos de bens de raiz, juros, tenças e ordenados, proes e precalços e do trote e meneio e que as pessoas que não tivessem d'estes rendimentos e fossem officiaes mechanicos e vivessem de seus trabalhos e misteres não sendo pobres e miseraveis, pagassem a vintena a respeito do que pagavam em cada anno dos alugueres das casas em que moravam (3).

Pena foi que se deixasse decahir a producção da terra portugueza, antes feracissima em variadas culturas (4).

Dominavam os estrangeiros no commercio da peninsula iberica. Affirma KONRAD HAEBLER que, em meiados do seculo XVII, havia em Madrid mais de 40:000 estrangeiros, em cujas mãos estavam, por completo, as artes e officios (5).

E esses estrangeiros eram bem tratados, reparando-se apenas

---

(1) LUIZ DE FIGUEIREDO FALCÃO, *Livro de toda a fazenda e real patrimonio dos reinos de Portugal, India e ilhas adjacentes.*

(2) W. SOMBART, *Der modern Kapitalismus*, pag. 325

(3) MIGUEL DE BULHÕES, *A fazenda publica de Portugal*, pag. 32.

(4) DUARTE NUNES DE LEÃO, *Descripção do reino de Portugal*, cap. 25.° e 26.°

(5) HAEBLER, *Die wirtschaftliche Blüte Spaniens im* XVI *Jahrhundert.*

em que não fossem os lucros parar ás mãos de nações inimigas (Hollanda e Inglaterra). Procurava-se tambem colher vantagens de reciproca concorrencia entre as nações estrangeiras.

Em 1682 é promulgada uma lei, que declara compativel com o privilegio da nobreza o exercer uma industria.

Antão de Castro e Manoel Caldeirão eram, no seculo XVII, os negociantes mais ricos de Lisboa, depois de Heitor Mendes de Brito, que alliou seus filhos ás familias de primeira classe. N'aquelle tempo era vulgar o dito proverbial: «Ha de mister a renda de Heitor Mendes». Um d'estes Mendes, de alcunha o *Benveniste*, quando a feitoria de Anvers não pôde pagar 300:000 cruzados, divida de D. João III, pagou-a elle, o hebreu, em reconhecimento ao pai do devedor que o deixaria arder, se elle não preferisse a fuga para judiciar livremente. Os Mendes e os Caldeirões, que ficaram na patria, judaisavam a occultas, como o provou a inquisição, condemnando um a carcere e outros a fogueira ([1]).

O finalisar do seculo XVII caracterizou-se por um conjuncto de medidas, orientadas por espirito mercantilista, tendentes á regulamentação industrial e commercial, com o intuito de valorisar as forças productivas do paiz. É o chamado *colbertismo*, tão condemnado, sob o ponto de vista politico, como sob o ponto de vista economico.

O *colbertismo* produziu os mais funestos resultados. Pela complexidade da sua organisação, fez passar a administração publica para as mãos de gente incapaz, cuja politica insensata revoltou, sem proveito algum, toda a Europa contra a França ([2]).

Para se conhecerem os resultados d'essa orientação basta lêr BOISGUILLEBERT, quando affirma: «Metade dos bens, tanto em fundos como em industria, foram, dentro de vinte e quatro annos, após 1660, anniquilados em pura perda, o que corresponde a mais de 1000 ou 1200 milhões por anno, sem que alguem possa duvidar da verdadeira causa, isto é, que se devia esta perda ao grande merito d'aquelles que governam as finanças» ([3]).

([1]) CAMILLO CASTELLO BRANCO, *Sentimentalismo e Historia*, pag. 168.
([2]) *Revue d'Économie Politique*, anno 20.°, n.° 5.
([3]) BOISGUILLEBERT, *Traité du mérite et des lumières de ceux que l'on appelle gens habiles dans la finance ou grands financiers*, pag. 163.

Não deixou de estender as suas raizes até Portugal o *colbertismo*, contribuindo para que se perdessem n'uma burocracia servil e sem valor as energias que se tornavam indispensaveis para levantar o paiz do enorme abatimento em que tinha cahido.

O mesmo succedera em Hespanha. Os escriptores do começo de seculo XVII achavam, como unica taboa de salvação, o regimen proteccionista, causador da ruina hespanhola. No meiado do seculo, todavia, Martinez de la Mota affirma que o valor de uma industria provém de ella ser sã e naturalmente desenvolvida e Konrad Haebler transcreve as seguintes palavras de um escriptor que, ao tempo, no reinado de Carlos II, tem a comprehensão moderna da solução da crise de então: «O metal mais precioso, o mais indispensavel, mais excellente e mais seguro, que jámais houve e jámais haverá, é o amor do trabalho; é o unico meio proprio para conservar um paiz e um governo. Onde elle falta, o ouro e a prata não teem duração; elle é a moeda que tem em todo o mundo o mais alto valor, sempre igual» (1).

Seculo XVIII

O Portugal economico do primeiro quartel do seculo XVIII offerece um aspecto bem singular: a magnificencia do rei contrastava profunda e flagrantemente com a fome e o desespero do povo. D. João V não achava sufficiente todo o ouro do Brazil para encher os cofres da curia de Roma, a cujas exigencias cegamente obedecia.

A mole immensa do convento de Mafra e a traça ampla do palacio das Necessidades pareciam horrivel sarcasmo lançado ás faces de um povo empobrecido.

O ouro do Brazil fascinava o rei e parecia thesouro inexgotavel, á custa do qual poderiam realizar-se as mais faustosas ostentações, como foram as do encontro das côrtes de Portugal e da Hespanha nas aguas do Caia, em 1720.

A esse tempo, haviam já esquecido os horrores da longa guerra

(1) K. Haebler, *Die wirtschaftliche Blüte Spaniens im* XVI *Iahrhundert*, pag. 19.

da independencia, a que poz termo o tratado de 9 de fevereiro de 1715; mas as consequencias d'essa guerra estavam bem marcadas na miseria do povo e na ruina das finanças publicas.

Nada ou quasi nada se fazia para melhorar as condições economicas do paiz: tomou o Estado a iniciativa de construir algumas fabricas e de as subvencionar e a isso se limitou então a protecção á industria nacional.

Muito mais longe não podia ir então o auxilio do Estado, porque minguados eram os seus recursos. Á morte de D. João v, as receitas publicas não passavam de 9.700:000 cruzados e a fonte de receita mais importante era a extracção de ouro do Brazil, que produzia cerca de 5 milhões de cruzados. O rendimento bruto do tabaco elevava-se a 2 milhões de cruzados e o das alfandegas a 1 milhão.

Vejamos, porque isso interessa ao nosso estudo, a situação da agricultura portugueza, a esse tempo.

Estava a propriedade, a bem dizer, nas mãos da coroa, dos fidalgos, do clero e dos estabelecimentos clericaes; mas de tudo se occupavam menos da cultura das suas terras. Deixavam-as confiadas a caseiros, que, á falta de capitaes e de outros meios para a exploração e onerados de impostos e de encargos de toda a ordem, as deixavam entregues ao acaso e ás vicissitudes da natureza. Os processos culturaes eram atrasadissimos (1).

Os olhos voltavam-se cupidinosos e ambiciosos para o ouro do Brazil. Affirma o visconde de Santarem (2) que em Portugal entráram, desde 1714 até 1746, nada menos de 96.044.628.415 reis em ouro, sem fallar de outras quantidades de ouro que não foram avaliadas em moeda corrente. E, além do ouro, vieram, durante esses 32 annos, 12:000$000 réis, só em diamantes.

A não serem os generos coloniaes, que se recebiam do Brazil, Portugal só podia offerecer ao commercio exterior os seus vinhos; mas os vinhos, assim como o sal, não tinham consumo senão em Inglaterra.

Pallidas eram as manifestações do trabalho nacional e essas mesmas não tardaram a ser esmagadas pelo famoso tratado de

---

(1) Francisco Luiz Gomes, *Le Marquis de Pombal*, pag. 46.
(2) Visconde de Santarem, *O quadro elementar das relações politicas*, vol. v.

Methwen, de 27 de dezembro de 1703, pelo qual a Inglaterra alcançou no nosso paiz o exclusivo para a entrada dos seus lanificios, em troca da reducção dos direitos de entrada em Inglaterra dos vinhos portuguezes, que passavam a pagar menos um terço de que os vinhos procedentes de França e de outros paizes.

Era manifesta a desigualdade das concessões: Portugal não tinha muito a receiar que os seus preciosos vinhos fossem deslocados por outros no mercado inglez, ao passo que a Inglaterra podia bem receiar o commercio de tecidos expedidos de outros paizes para Portugal. Não é, pois, para admirar que as importações annuaes da Inglaterra em Portugal viessem a exceder em um milhão de libras sterlinas o valor das exportações.

Esse notavel desequilibrio nas relações mercantis era preenchido ainda com o ouro do Brazil.

A tal ponto se desnacionalisou o commercio que os negociantes inglezes estabelecidos em Lisboa mandavam navios ao Brazil onde recebiam valiosas carregações e n'esses negocios os nomes portuguezes figuravam apenas por méra formalidade.

Assim, Portugal era, segundo uma phrase conhecida, *um crivo atravéz do qual passavam immensas riquezas, sem deixarem signal.*

Foi preciso que apparecesse Sebastião José de Carvalho e Mello para questões economicas de conhecido alcance serem guiadas, não segundo os mais criteriosos principios, mas segundo as mais palpaveis conveniencias. Deve, porém, dizer-se que o modo como elle conseguiu da côrte de St. James que se equiparassem em Inglaterra, a favor dos negociantes portuguezes, os vantajosos privilegios de que em Portugal gosavam os negociantes inglezes, demonstrou as qualidades de diplomata do funccionario que desempenhava a sua primeira missão no estrangeiro. Conseguiu tambem que se julgassem nos tribunaes portuguezes, como se fossem criminosos nacionaes, os capitães dos navios inglezes, que tivessem o ousio de praticar abusos nos portos de Portugal.

Sebastião de Carvalho tinha uma notavel previsão dos grandes problemas da economia nacional; não lhe eram despercebidas as immensas quantidades de ouro que transitavam por Lisboa para Londres, sem deixarem o menor signal da sua passagem.

As soluções que procurou para esse problema não tinham,

porém, grande originalidade, nem demonstravam amplas vistas politicas. Para evitar o exodo do ouro não achou outro meio senão aconselhar o rei a promulgar uma ordenança prohibindo a sahida das especies metallicas.

Deminuiu, é certo, a exportação do ouro; mas deminuiu tambem, simultaneamente, a actividade dos negocios.

Não tardaram as reclamações da Inglaterra, que enviou a Portugal um embaixador, lord Tirawley, com o fim de fazer sustar os effeitos da referida ordenança.

A adopção de medidas exclusivistas havia, necessariamente, de conduzir a outros exaggeros; assim, não tardou que fosse decretada a prohibição da importação de diversas mercadorias estrangeiras, para evitar d'esta forma a sahida de uma certa quantidade de numerario. A execução d'essas providencias foi feita á custa de uma vigilancia inquisitorial e de vexames sem conta para o commercio.

O contrabando em breve demonstrou que não se contrariam impunemente as leis economicas.

Francisco Luiz Gomes, baseando-se em documentos dos Archivos dos Negocios Estrangeiros da França, refere que, um dia, tres officiaes da marinha ingleza levavam para bordo, n'um bote, 45:000 cruzados, quando foram surprehendidos pelos empregados da alfandega [1]. O dinheiro foi-lhes apprehendido; mas, intervindo immediatamente o governo inglez, teve o dinheiro de ser restituido; depois d'esse acontecimento, Sebastião de Carvalho entendeu por conveniente substituir, em 1754, a prohibição absoluta, formulada na antiga lei, por um direito de 2 por cento sobre a exportação das especies metallicas.

A escassez da colheita dos cereaes, no referido anno, contribuiu ainda poderosamente para fazer desapparecer quaesquer peias á exportação de numerario, porque foi preciso recorrer á Inglaterra e essa não cedia cereaes senão em troca de especies metallicas, pois a nada chegavam, para bem dizer, os productos portuguezes susceptiveis de exportação.

Em outras medidas se demonstrou a falsa orientação economica de Sebastião de Carvalho e Mello. O regimen de monopo-

---

[1] F. Luiz Gomes, *Le Marquis de Pombal*, pag. 62.

lios e as perturbações, que estabeleceu, contribuiram poderosamente para a decadencia da riqueza do paiz. Basta recordar, de passagem, a adjudicação do exclusivo do commercio da India e da China, feita a um negociante chamado Feliciano Velho Oldemburgo; basta citar os privilegios da Companhia do Commercio de Grão-Pará e Maranhão, outhorgados por decreto de 11 de agosto de 1753, privilegios que abrangiam concessões extraordinarias, desde navios de guerra e terras, até direitos minimos nas alfandegas da metropole.

A *Meza do Bem Commum* teve de fazer-se ecco das reclamações que similhantes concessões levantavam em todo o paiz, especialmente pelos prejuizos consideraveis que advinham ao commercio e á industria. A *Memoria*, que a Meza depôz nas mãos do rei, é notavel a muitos respeitos; com uma grande justeza de vistas, estabeleceu as vantagens do regimen da liberdade de commercio [1].

A resposta que a *Memoria* teve foi a condemnação dos dirigentes da Meza e a abolição d'esta instituição, vindo substituil-a a *Junta do Commercio*.

Devemos, porém, observar que o plano de Sebastião de Carvalho era patriotico, segundo o seu modo de vêr: todo o seu empenho consistia em animar o commercio e em emancipar as provincias do Brazil da influencia e do dominio dos jesuitas, cujo poderio augmentava em proporções assombrosas. A moralidade d'esse objectivo não basta, porém, para justificar os meios de que se lançou mão para o alcançar.

Onde, todavia, mais se accentuou a falsa orientação economica de Sebastião de Carvalho, o seu exaggerado colbertismo, foi na creação da famosa Companhia das Vinhas do Alto Douro, á qual outhorgou larguissimas concessões e concedeu absurdos privilegios. Basta ler o alvará de 10 de setembro de 1756 para se reconhecer o alcance d'esses privilegios. Devemos lembrar que á Companhia era dado o monopolio de todo o commercio dos vinhos, aguardentes e vinagres, que se exportavam do Porto para as possessões da Bahia, Rio de Janeiro, S. Paulo e Pernambuco, no Brazil; que todos os productores de vinhos eram obrigados a

[1] Encontra-se uma copia d'esta *Memoria* entre os manuscriptos de A. Joaquim de Figueiredo, existentes na Bibliotheca Nacional de Lisboa.

vendel-os por preços determinados; que se limitavam, nas duas margens do Douro, as terras productoras do vinho do Porto e ningüem podia vender, na *demarcação*, em cada anno, mais vinho do que a media da sua producção em cinco annos. Tinha até a Companhia um fôro privilegiado para os seus pleitos.

Mas não usufruiu a Companhia apenas os favores concedidos em 1756. Em 1760, alcançou o exclusivo da fabricação da aguardente nas provincias do Minho, da Beira e de Traz-os-Montes, sendo, por esse motivo, prohibido aos viticultores distillarem os seus vinhos; em 1773, prohibiu-se aos proprietarios da *demarcação* cultivarem vinhas sem auctorisação da Companhia; por decreto de 4 de agosto de 1776, prohibiu-se expressamente a exportação por qualquer porto de vinhos de Vianna, Aveiro, Monsão, Bairrada, Figueira, Coimbra e Algarve, só para fazer subir os preços dos vinhos da Companhia.

E fazia-se isto em Portugal, ao mesmo tempo que Turgot, em França, implantava principios de liberdade de commercio!

Disse-se, e até parece provado [1], que na creação da Companhia teve em vista Sebastião de Carvalho contrabalançar o monopolio de facto, que estava nas mãos dos inglezes; mas não póde contestar-se que essa medida obedeceu a um acanhadissimo criterio economico, — um tanto desculpavel então, se se attender ás circumstancias do meio e do tempo; mas indesculpavel, quando, em pleno seculo XX, se faz reviver tão absurda orientação, como se demonstra no decreto de 10 de maio e no regulamento de 16 de maio de 1907, relativos ao commercio e á exportação de vinho do Porto.

Quer a consideremos sob o ponto de vista dos interesses nacionaes, quer sob o ponto de vista capitalista, que mais especialmente nos occupa, é indiscutivel que á creação da Companhia foram sacrificados os mais sagrados direitos.

A fortuna particular soffreu um profundo golpe com medidas tão desorientadas, que nem mesmo aproveitaram aos viniculltores, os quaes tinham depositado alguma esperança na clausula do alvará de 10 de setembro de 1756, que lhes promettia dinheiro a 3 por cento.

A sorte da industria não era mais promettedora do que a da

[1] Freire Girão, *Memoria historica*.

agricultura. Portugal tinha adoptado cegamente as doutrinas de Colbert; por isso não se comprehendia protecção ao trabalho nacional senão por meio de monopolios, privilegios e favores.

Mas a industria nacional não sahiu nem podia sahir por taes processos do seu abatimento, nem se podia realisar por similhante forma o sonho de fechar as portas á sahida do ouro, forçando os inglezes a pagar em moeda os vinhos portuguezes que consumiam.

A propria industria das sedas, tão favorecida de privilegios, não conseguiu levantar cabeça senão á custa do thesouro. Diz Accursio das Neves que, á morte de D. José, chegavam os subsidios dados á Real Fabrica, só pelo cofre do chamado *donativo dos quatro por cento* a 590:291$787 reis, além de 96:153$784 reis recebidos em ouro e prata da Casa da Moeda, desde o anno de 1756 [1]. As subvenções dadas ás industrias dos chapeus, dos relogios, do vidro, dos botões, da serralharia e de fundição subiram a 114 contos de reis; mas nenhuma das fabricas conseguia alcançar existencia prospera e duração longa [2].

Os jesuitas procuraram exercer novamente a sua influencia nos negocios do Estado e na economia do paiz; no Brazil, especialmente, eram constante estimulo de revolta contra a administração da metropole. Sebastião de Carvalho viu-se forçado a appellar para o papa, em termos energicos; e assim se conseguiu que fosse nomeado o cardeal Saldanha para visitador e reformador da Ordem dos jesuitas em Portugal e suas possessões, com a auctoridade e jurisdicção necessarias para reprimir e corrigir os abusos dos padres [3].

O cardeal Saldanha começou por publicar um decreto prohibindo aos jesuitas que continuassem a exercer o commercio consideravel que faziam, montando armazens publicos com toda a especie de mercadorias da Asia, da Africa e da America e até mesmo escriptorios bancarios. Em verdade, alguns jesuitas chegaram a alcançar assim capitaes consideraveis e os negocios vantajosos animavam-os a toda a sorte de especulações, desde as mais caras especiarias até aos mais modestos comestiveis.

---

(1) José Accursio das Neves, *Noções historicas, economicas e administrativas sobre a producção e manufactura das sedas em Portugal*, pag. 114.

(2) F. Luiz Gomes, *Le Marquis de Pombal*, pag. 118.

(3) Archivo do Ministerio dos Estrangeiros. Despacho de Francisco de Almada, de 9 de maio de 1758.

Depois de uma série de factos, cuja narração nos levaria longe, foram, por alvará de 17 de fevereiro de 1761, confiscados em proveito do rei e encorporados para sempre nos dominios da corôa todos os bens, moveis e immoveis, pertencentes á Companhia de Jesus, em Portugal e suas possessões.

Pouco tempo depois, Sebastião de Carvalho, então conde de Oeiras, ao mesmo tempo que tirava ao clero e á nobreza privilegios de que gosavam, fazia á industria manufactureira concessões de toda a especie, que, infelizmente, não produziram resultados palpaveis, antes serviram apenas para crear sacrificios consideraveis para o thesouro nacional.

Por alvarás de 10 e 27 de setembro de 1765 foi concedida á navegação nacional a liberdade por tanto tempo reclamada, podendo d'ahi em diante qualquer armador mandar livremente navios aos portos da Madeira, Açores e America.

O conde de Oeiras tinha uma grande admiração pelo cardeal de Richelieu; por isso, não é de extranhar que as doutrinas do ministro de Luiz XIII influissem no plano de governo do estadista portuguez, adoptando algumas providencias cuja influencia na organisação capitalista em Portugal não póde ser contestada.

Citemos, em primeiro logar, a lei de 25 de julho de 1766, estabelecendo a nullidade dos testamentos escriptos por pessoas seculares ou religiosas, pelos quaes fossem instituidos legatarios ou herdeiros parentes até ao quarto grau e as ordens e corporações dirigidas pelos testadores.

A lei de 9 de setembro de 1769 foi mais severa ainda. Prohibiu a todos aquelles que tivessem parentes até ao quarto grau que testassem, a não ser para dispôr da terça. Dispunha tambem que os legados não poderiam exceder nunca a terça disponivel; que os religiosos não podiam ser instituidos herdeiros; que era prohibida qualquer instituição de *fidei commisso* sobre bens de raiz, etc.

Para obstar á multiplicação exaggerada dos morgadios, que dava em resultado instituir vinculos em predios de ridiculos rendimentos, foi promulgada a lei de 3 de agosto de 1770 [1].

Essa lei é considerada por Souza Lobão como a mais sabia, mais prudente, judiciosa e providente.

---

[1] Souza Lobão, *Tratado pratico de morgados*, pag. 25.

O legislador observa, no relatorio d'essa lei, ser «a instituição dos morgados, em geral, uma rigorosa amortisação de bens, contraria ao uso honesto do dominio, que o proprietario tem por direito natural, contraria á justiça e á igualdade com que esses bens deveriam ser repartidos entre os filhos; contraria, por isso, á multiplicação das familias; contraria ao giro do commercio, que dos mesmos bens em liberdade se podia fazer; contraria á utilidade publica, que se desvia das receitas do meu real erario emquanto o priva das sizas, que provém da liberdade dos bens e das successivas rendas, e contraria ao bem commum dos povos sobre os quaes recáe o peso das imposições publicas».

Assim, ficou restricta a instituição dos morgados ás pessoas que tivessem as qualidades definidas na lei.

Entre as entidades ás quaes era licito requererem a instituição de morgados contavam-se as que «se tivessem feito dignas d'esta faculdade... pela util e louvavel applicação ao commercio, á agricultura ou ás artes liberaes».

Mas, observa Souza Lobão, não basta qualquer commercio para ser interessante ao reino e á coroa e para nobilitar o commerciante; não basta ser um negociante de retalho, de pequeno trato, etc. É, sim, preciso, como depois exarou o mesmo legislador na lei de 29 de novembro de 1775, que sejam negociantes de grosso trato para se calcularem em goso de nobreza; é preciso que sejam matriculados e com os mais requisitos da lei de 3 de agosto de 1770.

Antes d'esta ultima lei, havia morgados *regulares* e *irregulares* e estes subdividiam-se em *electivos*, de *agnação*, *masculinidade* simples ou qualificada, em *perpetuos* e *temporaes*. Pela referida lei ficavam sendo de uma unica natureza, *regulares*.

Ao finalisar do seculo XVIII appareceu o papel-moeda, para supprir as exigencias da infeliz guerra do Russilhão. As emissões feitas pelo thesouro, desde 1 de agosto de 1797 até 6 de dezembro de 1799, fôra de 16.513:720$000 réis.

Seculo XIX

Não foi desde o começo do seculo que se manisfestaram quaesquer tendencias para a concentração capitalista. Primeiro a

guerra, depois as dissenções politicas internas não crearam meio asado para essa concentração.

Só passado 1820 apparece uma entidade nova a intervir nos destinos do paiz — o financeiro.

Na sessão das côrtes de 11 de outubro de 1821 é apresentado pela commissão de fazenda o projecto da fundação do Banco de Lisboa, que veio a ser creado por lei de 21 de dezembro do mesmo anno. A instituição tinha especialmente por fim extinguir o papel-moeda circulante. Por intermedio do Banco amortisaram-se, effectivamente, em 1826, mil contos; mas, quando, em 1834, se carimbou o papel-moeda ainda existente, acharam-se apenas 8.800:000$400 réis, cuja amortisação foi determinada por decreto de 23 de julho d'esse anno, á razão de 80 por cento em ouro, por intermedio do Banco de Lisboa, ou, ao par, em titulos do thesouro, a praso de tres e quatro annos.

O Banco de Lisboa foi creado com o capital de 10:000 acções de 500$000 réis cada uma, pagas metade em papel, metade em metal.

Dissolvidas, em 1823, as côrtes e abolida a Constituição, a lei de 7 de junho de 1824 sanccionou a de 21 de dezembro de 1821, garantindo ao Banco uma existencia que durou até 1846.

A emissão do Banco de Lisboa, creada em 1822 e que n'esse anno apresenta a somma de 1:057 contos, cresce constantemente. O periodo agitado de 1828 a 1834 não influiu tanto quanto poderia esperar-se. Em 1833, a emissão apresenta-se em 4:550 contos; depois, até á crise de 1846, augmenta constantemente, chegando a attingir 10:000 contos, n'aquelle anno.

Nos quatro ultimos annos, o movimento bancario em Portugal tinha-se desenvolvido consideravelmente e, á sombra d'elle, o conde de Thomar tinha temerariamente procurado restaurar a economia do paiz «empregando, todavia, a par isso, expedientes de mera politica condemnavel» (1).

Não tardou que a agiotagem se desenvolvesse desenfreada

(1) Oliveira Martins, *Banco*, no *Diccionario Universal Portuguez Illustrado*, pag. 870.

com a creação de phantasticas Companhias, que só serviam para se interporem capitalisticamente entre o thesouro e aquelles que tinham de executar, a final, os serviços tomados para pretexto da fundação d'ellas. Taes eram a Companhia das Obras Publicas, creada para construir a rêde das estradas, e a Confiança, creada para prestar ao thesouro um emprestimo de 4:000 contos a 5 %, condições que o governo impunha á adjudicação do contracto do tabaco. A final, a Companhia das Obras Publicas não era emprezaria de obras: era apenas um banco administrador d'ellas, por conta do Estado; cumpria-lhe angariar os capitaes necessarios e convertel-os em estradas, cujo custo o Estado indemnizaria, mediante o juro de 6 % e a cessão de uma parte do rendimento liquido das portagens. Pelo que diz respeito á Confiança, sublocado o contracto do tabaco a uma Companhia especial, aquella auferia da operação o excesso do juro até 6,85 % que esta teve de abonar-lhe, sob forma de premio annual.

Por decreto de 14 de novembro de 1846, pretendeu-se impôr a circulação das notas sem agio; mas baldado esforço foi esse, servindo apenas para augmentar a desconfiança. Veio depois o decreto de 19 de novembro, fundindo o Banco de Lisboa e a Confiança Nacional.

D'esse consorcio resultou ser fundado, pela carta organica de 26 de dezembro de 1846, o Banco de Portugal, com o privilegio da emissão illimitada, sem reserva necessaria, convertivel á vista, mas recebida como dinheiro pelas repartições publicas. A crise nem assim se liquidou, antes se aggravou; por isso, voltaram-se as vistas para a amortisação das notas e os effeitos beneficos foram immediatos; os fundos começaram gradualmente a subir e com elles as acções do Banco.

Levar-nos-hia longe e affastar-nos hia do objecto especial do nosso estudo a enumeração das medidas promulgadas em 1847 para restabelecer a confiança e augmentar a reserva metallica da circulação portugueza.

A emissão tomou, porém, pouco desenvolvimento, no periodo de 1847-1876, em virtude do descredito da nota, da restricção do privilegio da emissão ao districto de Lisboa e da existencia de outro banco emissor, o Banco Commercial do Porto [1]. Mul-

[1] Oliveira Martins, loc, cit., pag. 874.

tiplicaram-se no norte do paiz os Bancos emissores; mas, por isso mesmo que foram muitos, nunca o total das notas attingiu sommas importantes.

A creação de novos Bancos, em vez de ser a denuncia de um augmento de riqueza, foi a origem da crise de 1876, por isso que ao grande volume das transacções não correspondiam os bons resultados d'ellas.

O ouro do Brazil, que um seculo antes nos enebriára, vinha agora trazer-nos embaraços de outra ordem. Esse ouro falhava, tanto pelo desfavor geral dos cambios, como porque os generos que lá podiamos collocar encontravam um mercado cada vez mais restricto.

Demais, o jogo sobre fundos hespanhoes tomou em Lisboa e Porto proporções desastrosas; as transacções diariamente realisadas na Bolsa de Lisboa, por exemplo, representavam milhões de escudos (1).

Oliveira Martins, passando em revista os balanços bancarios de 1876, foi conduzido á seguinte conclusão: «Póde dizer-se que 19:000 contos de capital bancario, sommado á emissão e depositos reaes actuaes, são a cifra effectiva que em Portugal exerce o officio do banco; os excessos representam ou phantasmagorias numericas ou especulações e consolidações alheias e oppostas á natureza das operações propriamente bancarias» (2).

O capital portuguez diminuiu, com notavel retrahimento. Os depositos nos estabelecimentos de credito de Portugal, que em 1889 eram representados por 68:534 contos, não passavam de 35:541 contos, segundo os balanços de 31 de dezembro de 1901. Como se vê, os depositos baixaram 33:000 contos em doze annos. Em 31 de dezembro de 1907, a importancia d'esses depositos não passará de 25:000 contos.

Este phenomeno é tanto mais para ponderar quanto é certo que succede exactamente o contrario na Inglaterra, onde os depositos particulares subiram, no primeiro periodo observado, 30 %, e nos Estados Unidos 43 %.

---

(1) Quem quizer estudar a fundo a crise de 1874 deve lêr, com proveito, o relatorio então apresentado pela direcção do Banco de Portugal aos seus accionistas.

(2) Oliveira Martins, loc. cit., pag. 881.

É certo que a fortuna particular tende a affastar-se dos negocios, quer entregando-se á agiotagem e á usura, quer malbaratando-se ou applicando-se inutilmente.

Calculava, em 1876, Barros Gomes, n'um relatorio apresentado á Associação Commercial de Lisboa, que o *stock* monetario de ouro em Portugal subia a 50.000 contos. Hoje, está sensivelmente diminuido, principalmente pelo exodo do ouro, que se seguiu á crise de 1891, calculando-se em cerca de 20:000 contos a differença para menos (1).

Se abatermos ainda 15:000 contos, que, segundo os melhores calculos, representam o capital nacional collocado no estrangeiro, ficarão reduzidos a 15:000 contos os 50:000 contos do *stock* do ouro existente em 1876.

O ouro foi substituido na circulação interna pela nota, cuja emissão attingia a importante somma de 70:500 contos, em fins de novembro de 1907.

Na investigação da organisação capitalista em Portugal convém não esquecer os capitaes collocados no Brazil, cujos rendimentos são usufruidos no nosso paiz, bem como as remessas, de variada proveniencia, periodicamente recebidas de lá. Segundo os melhores calculos, essas remessas podem ser avaliadas em 20:000 contos, em cada anno.

A collocação em fundos publicos é ainda consideravel no nosso paiz, a despeito do descredito em que cahiu a administração do Estado. Bem vasto é esse campo de applicação, porque a divida interna, que 1852 era de 35:000 contos, está agora em perto de 375:000. «Se se calcular em 40 % do seu valor nominal — dizia, em 1901, o sr. Anselmo de Andrade — o que o mercado deu realmente por esses titulos, vê-se que durante o periodo referido foram capitalisados na nossa divida interna cerca de 130:000 contos, que sahiram da economia particular, das liquidações por motivo de inventario e do dinheiro vindo do Brazil» (2).

O desenvolvimento industrial que se operou no paiz, de 1892 para cá, apresenta-nos uma das mais salientes manifestações da concentração capitalista no nosso tempo. Crearam-se novos ramos de trabalho, expandiram-se outros, transformaram-se alguns por

(1) Anselmo de Andrade, *Portugal Economico*, pag. 172.
(2) Anselmo de Andrade, loc. cit., pag. 161.

uma forma verdadeiramente extraordinaria, sob a influencia de uma protecção pautal mais ou menos justificada e com o auxilio do augmento de consumo dos nossos productos, especialmente nos mercados coloniaes portuguezes.

A industria algodoeira attingiu em Portugal proporções que convém assignalar aqui, ainda que muito summariamente, pois ocupa hoje para cima de 50:000 operarios.

De resto é conhecida a expansão d'essa industria por toda a parte. Segundo as estatisticas levadas ao congresso algodoeiro de 1907, em Vienna, o numero de fusos em laboração, nos diversos paizes, sobe a 100.521:078 e esse numero vae crescendo sempre (1).

Em 1887, havia, em Portugal, dez fabricas de fiação e tecelagem de algodão pertencentes a sociedades anonymas; tinham essas fabricas um capital de 2:555 contos em acções e obrigações e em edificios, terrenos e machinas 2:698 contos. Em 1892, data da reforma pautal, tinha o numero das fabricas subido a quatorze e o seu capital ascendera para 5:239 contos. Em 1899, o valor dos terrenos, edificios e machinas era já de 7:250 contos, porque a producção teve de augmentar consideravelmente para supprir a exportação para a Africa, que, representando, em 1891, apenas 100 contos, já então se elevava a 2:377 contos.

Veio a crise de Africa, em 1900, baixando a exportação de 300 contos n'esse anno; nos dois annos segnintes, a industria algodoeira, que poderia fabricar e vender 4:450 contos, deixou de vender 2:820 contos, n'esse periodo.

Em 1903, o capital das fabricas elevava-se já a 6:498 contos e em edificios, terrenos e machinas estavam empregados 8:142 contos, isto é, aproximadamente tres vezes mais do que em 1887.

A estes algarismos seria preciso accrescentar os que se referem ás emprezas particulares, que abrangem doze fabricas de fiação e tecelagem e dez só de tecelagem e differentes pequenas fabricas. Segundo investigações dignas de credito (2) o capital immobilisado n'essas emprezas era, em 1903, de 4:468 contos,

(1) *The fourth International Congress of delegated representatives of Master Cotton Spinners and Manufacturer's Associations*, pag. 23.

(2) L. Firmino de Oliveira, *Industria algodoeira*, pag. 20.

ficando, portanto, elevado a mais de 11:000 contos o capital da industria algodoeira, se entrarmos em consideração com a tecelagem manual, fabricas de acabamento, malhas, etc., e o valor dos edificios, terrenos, machinas, materias primas, devedores e caixa não deve ser inferior a 20:000 contos.

A importação do algodão em rama, que 1887 não passava de 5:000 toneladas, attingiu, em 1903, 14:000 toneladas.

Desde 1887 a 1889, os dividendos medios foram 10,44 %, 8,25 %, 7,14 %, o que explica a affluencia de capitaes para a expansão d'esta industria; depois d'isso, baixaram sensivelmente, pelos motivos já expostos.

Os relatorios respeitantes a 31 de dezembro de 1906 das sociedades anonymas que exploram a industria algodoeira dão elementos para calculos bastante aproximados.

Os valores que essas emprezas representam são os seguintes:

Capital, acções	5:407	contos
Capital, obrigações	1:823	»
Terrenos. edificios e machinas.........	9:049	»
Manufacturas, caixa e valores em carteira	2:603	»
Fundos de reserva.....	1:258	»
Capital fluctuante	2:429	»

Os lucros medios, o anno passado, foram de 6,16 % sobre o capital acção, no valor de 329 contos, e os dividendos medios attingiram 4,27 %, na importancia de 219 contos.

A producção das fabricas a que os relatorios se referem é calculada em 12:000 contos.

Se juntarmos aos dados financeiros relativos ás sociedades anonymas os que respeitam á industria exercida por particulares, veremos sensivelmente accrescidos os algarismos que acima apresentamos.

Na phase actual do capitalismo em Portugal, a industria algodoeira representa, pois, um papel muito notavel e póde bem dizer-se que trouxe até nós o reflexo da concentração capitalista que em alguns paizes está constituindo um dos mais assignalados phenomenos economicos das sociedades do nosso tempo.

O desequilibrio entre a producção e o consumo, avaliado para esta industria em 14:000 contos, chegou mesmo a conduzir á organização de uma especie de *kartel*.

Não deve esquecer-se o alcance da industria algodoeira em Portugal ainda sob um outro ponto de vista: — o do desenvolvimento da cultura do algodão nas colonias portuguezas, para ser transformado pela industria nacional. Procurou auxiliar a expansão d'essa cultura o decreto de 20 de março de 1906 e muito se pode esperar d'ella (1). Já assim se pensava no nosso paiz, em 1862. «O governo, favorecendo estas emprezas, prestava não só um grande serviço ao paiz, mas creava novas fontes de receita com o desenvolvimento d'esta industria nacional» — escrevia-se n'um relatorio (2).

Os novos meios de transportes resultantes do alargamento da nossa rêde de caminhos de ferro veio trazer á expansão industrial recursos poderosos, sem os quaes ella não poderia operar-se.

A nossa organização capitalista é, porém, susceptivel de novas transformações, que muito a poderiam aperfeiçoar. O systema dos *clearing-houses*, introduzido no nosso paiz, havia de trazer necessariamente a reducção do nosso meio circulante, com duas vantagens manifestas: uma, a melhoria de cambio, por crear porporções mais justas entre as reservas metallicas e a circulação; outra, maiores disponibilidades para o aproveitamento das nossas riquezas territoriaes.

Conclusões

Do estudo historico, esboçado até aqui, podemos passar agora a conclusões de ordem sociologica.

Assistimos á evolução do capitalismo, desde a Renascença, como forma transitoria da civilisação. Vimos a concentração do capital operando, por vezes, novos modos de ser na sociedade portugueza. Todavia, foi a evolução da industria, em geral, e a intervenção dos financeiros que deram verdadeiramente caracter

---

(1) *Rapport officiel du 3.ème congrès cotonnier international*, Brême pag. 164.

(2) *Relatorio da commissão dos industriaes do Porto enviada á exposição, universal de Londres em 1862 pela Associação Industrial Portuense*, pag. 72.

á organisação capitalista em Portugal, como a haviam dado á dos outros paizes.

A producção pelas machinas, sobretudo, actuou por uma fórma singularissima n'essa evolução, porque, como é sabido, as machinas exercem uma poderosa acção sobre a estructura da industria, sobre a extensão dos mercados, sobre as crises economicas, sobre os salarios, sobre as crises de trabalho, sobre o desenvolvimento physico e moral do operario, sobre a duração do seu trabalho e até sobre o seu proprio orçamento domestico, como consumidor.

Não ha proporção, é certo, entre as grandes vantagens que as machinas facultam ás camadas superiores dos trabalhadores, aos chamados *skilled workmen*, e ás camadas inferiores.

É assombroso o quadro da formação e organisação do poderio financeiro das nações modernas; chega a ser collossal o alcance do chamado *triangulo das forças financeiras da America*, representado pelos caminhos de ferro, pelos *trusts* industriaes e pelos bancos.

Nos ultimos cincoenta a cem annos, operou-se uma transformação completa na organisação industrial de todos os paizes. Na Allemanha, por exemplo, ha cincoenta annos, milhão e meio de operarios trabalhavam para patrões industriaes e dois milhões operarios, artifices, eram independentes; hoje, a cada artifice independente correspondem tres operarios ao serviço dos representantes do capitalismo moderno.

Ha cincoenta annos, o capitalismo estava ainda preso ás tradições e fórmas do mester; hoje os officios são desempenhados pelo systema do proletariado capitalista.

Na opinião dos mais eminentes economistas, a revolução ecomica industrial, que principiou ha quinhentos annos, chegou agora a um periodo novo, que parece ser o remate d'essa transformação. A producção mestereira acabou, para dar logar á producção capitalista industrial (1).

O capitalismo industrial vae transformando, na verdade, a vida economica dos povos e penetrando com o seu espirito racionalista todos os systemas de producção.

---

(1) W. ZOMBART, *Der modern Kapitalismus*, cap. XXVIII.

Basta ler alguns capitulos da obra de HOBSON, ***The evolution of modern capitalism***, para se ter diante dos olhos o mais grandioso quadro que a nossa imaginação possa conceber. São emprezas de primeira ordem, entre as quaes 53 companhias de caminhos de ferro, seguras nas mãos de poucos financeiros; é a sociedade das minas de diamantes de Beers, na Africa Austral, dando leis ao mundo sobre o valor dos diamantes!

E Portugal não escapou a essa evolução, apesar de ter cedido o passo a outros povos em emprezas de caracter economico e financeiro.

Nos seculos XIII, XIV e ainda em parte do XV pertencia ao clero, aos templarios e aos judeus o predominio capitalista, pelas doações alcançadas por uns e pela desmedida ambição e sagacidade de outros.

No seculo XV, porém, se é certo surgir a usura a provocar a concentração dos capitaes, é certo tambem que Portugal se transformou, como vimos, em receptaculo de riquezas sem conta ([1]) especialmente pelo monopolio do commercio das especiarias.

No seculo XVI esboça-se verdadeiramente a concentração capitalista em Portugal; os monopolios de facto estabeleceram-se; primeiro, era o da pimenta vinda das Indias; depois, era o da venda das especiarias.

O ouro, porém, que fascinava os olhos, desnorteava, ao mesmo tempo, os espiritos e Portugal não soube aproveitar n'uma larga empreza de consolidação economica os larguissimos recursos que lhe promanavam de variadas e opulentas origens. Julgou inexauriveis essas riquezas que assentavam apenas sobre os frageis pés do bezerro de ouro.

O exodo dos judeus levou muito d'esse ouro; outra parte foi parar á sacola dos jesuitas.

D'est'arte, no seculo XVII começou o nosso paiz a provar o fel dos velhos desatinos e desregramentos; os encargos eram sem conta; de todos os lados se reclamavam despezas para as quaes não havia dinheiro. Esta uberrima terra portugueza pouco produzia, porque durante longos annos parecera tarefa ingloria amanhal-a e colher os fartos fructos de que ella era capaz.

([1]) *Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto*, vol. I, pag. 183.

Soou, com o seculo XVIII, a hora do tardio arrependimento; quiz-se então seguir pelo caminho de outros povos, que preferiram a vida regrada aos desmandos faceis de gente que só no dinheiro accumulado vira riqueza.

Surgem então as tentativas industriaes fundadas em concessões e favores sem conta, em proteccionismo exaggerado, que não conseguiu fundar em bases solidas nenhum ramo de trabalho nacional.

A esse tempo, já a Gran-Bretanha havia adoptado os novos methodos industriaes. Depois d'ella, foi a Hollanda, a proposito da qual ADAM SMITH escreveu que, em proporção da extensão da terra e do numero dos seus habitantes, era o paiz mais rico da Europa (1). Na Gran-Bretanha, o grande supprimento de capital e de trabalho aproveitavel para novas industrias coincidiu com um grande desenvolvimento das artes industriaes e com a descoberta de ricos jazigos de carvão e ferro em varios pontos do paiz (2).

Por fim, a concentração industrial, os caminhos de ferro e os bancos trouxeram uma nova era á organisação capitalista; o *investor* constitue um grande proletariado capitalista, que ao lado do financeiro occupa aproximadamente a mesma situação do proletariado operario em face do emprezario industrial.

Até onde chegarão as consequencias do novo estado de coisas? — é licito perguntar.

Para responder a esta pergunta, esbocemos o quadro que se desenrola diante de nossos olhos:

As machinas hão de, com o decorrer de tempo, absorver toda a industria, preparando assim uma especie de collectivismo, resultante da suppressão da concorrencia e da intervenção do Estado.

E o Estado, realisando uma especie de expropriação, irá completando isso a que os socialistas chamam um acto de justiça, em harmonia com o interesse geral (3).

O resultado necessario d'esse dominio dos machinismos e do collectivismo será poderem ser satisfeitas pela forma mais economica as necessidades primarias dos homens.

---

(1) ADAM SMITH, *Wealth of nations*, liv. II, cap. V.
(2) J. HOBSON, *The evolution of modern capitalism*, pag. 24
(3) *Revue Socialiste*, anno 20.º, n.º 237, pag. 333.

Assim, o homem ficará com mais liberdade e disporá de mais recursos para alargar o seu dominio em outras espheras de actividade, realisando fins de mais nobreza e de mais Arte, em que a sua individualidade e a concorrencia poderão mais livremente exercer-se.

O capitalismo moderno está preparando, pois, á humanidade de amanhã um singular modo de ser. Póde fundamentalmente prevêr-se que os aperfeiçoamentos das machinas, a divisão do trabalho e a concentração sempre crescente dos instrumentos de trabalho hão-de aproximar duas classes por tantos seculos antagonicas.

Diz Henri Hauser, e com razão: «Da mesma fórma que no seio do regimen cooperativo se elaborou já o capitalismo moderno, talvez que no seio das novas sociedades capitalistas se esteja construindo já, peça por peça — como esses archipelagos de coral que se construem silenciosamente sob o espelho dos mares polynesicos — o edificio de uma nova sociedade» [1].

E Portugal não escapará, seguramente, a essa evolução, para a qual elle cooperou valiosamente, durante largo tempo, contribuindo para os primeiros lances da organisação capitalista com um largo espirito de iniciativa, que chegou a tocar as raias de uma triumphante aventura, e com o aproveitamento de riquezas sem conta, que por tantos annos se depararam diante dos passos d'este povo ebrio de ouro e de gloria.

---

[1] *Revue d'Économie Politique*, 16.° anno, n.° 4.

NOTES DE BRYOLOGIE PORTUGAISE

PAR

ALPHONSE LUISIER

La littérature bryologique portugaise n'est pas riche. Depuis la publication du Catalogue des Mousses du Portugal par M. le Dr. JULIO HENRIQUES en 1889, le seul travail d'ensemble publié sur la bryologie portugaise est la liste des mousses, faisant partie du Catalogue des Cryptogames de l'Académie Polytechnique do Porto par M. GONÇALO SAMPAIO, en 1901 à 1902 (1).

Depuis mon retour en Portugal en été 1906 je n'ai cessé de faire des efforts pour réunir un matériel d'études aussi considérable que possible. Des excursions bryologiques ont été faites par moi aux environs de *S. Fiel*, à *Serra da Estrella* et *Gardunha;* aux environs de *Lisbonne*, à *Cintra*, à *Setubal*, à *Serra d'Arrabida*, à *Guimarães*, *Pombeiro* près de *Felgueiras*, etc.

D'autre part plusieurs de mes amis et de mes élèves ont bien voulu m'aider. Je dois mentioner en particulier les envois de mousses du Gerez, récoltées par mon illustre ami le R. P. TAVARES, professeur au collège de S. Fiel et redacteur de la

---

(1) *Cryptogamiae*. Extr. do *Annuario da Acad. Polyt. do Porto*, 1901 à 1902.

Broteria. Grace à l'extrême obligeance de M. **Gonçalo Sampaio** j'ai eu à ma disposition pendant quelque temps les mousses de l'Académie Polytechnique. Mes élèves **Pequito Rebello, Moraes Cardoso** et **Branco Teixeira** ont contribué de leur part par des envois de mousses de *Gavião, Sobral de Mont'Agraço* et de *Coruche*.

La plus grande partie de mes récoltes reste encore à étudier. J'ai pensé pourtant qu'il n'était pas hors de propos de publier peu a peu les résultats les plus intéressants de mes recherches.

J'ai inclu dans ces notes quelques espèces que j'ai récoltées en février 1902 aux environs de Guimarães. Elles avaient été déterminées à l'Herbier Boissier par M. **Colomb-Duplan**.

Collège de Campolide, le 26 septembre 1907.

---

a) ACROCARPI

Andreaea Rothii W. M. Abondant sur les blocs granitiques au sommet de la Penha, à Guimarães. Août 1907. M. le Dr. J. Henriques l'avait déjà récoltée au Gerez. Il est probable qu'elle soit assez répandue sur les montagnes du Nord du Portugal.

Phascum piliferum Schw. Nouveau pour le Portugal. Je l'ai récolté en très petite quantité, dans le jardin du Collège de Campolide. Février 1907.

Astomum crispum (Hedw.) Hpe. Guimarães, fév. 1902.

Gymnostomum calcareum Br. germ. var. tenellum Schpr. Environs de Guimarães, fév. 1902. Cette variété est nouvelle pour le Portugal.

Dicranum scoparium L. Cette espèce est très fréquente

dans tout le Portugal. Presque tous les exemplaires que j'ai observés appartiennent à une forme à feuilles très peu dentées.

Campylopus polytrichoides De Not. Cette espèce paraît assez commune en Portugal; les fruits par contre en sont fort rares. Je l'ai récoltée avec sporogones complets à Val de Rosal (Costa de Caparica). J'ai décrit et figuré le sporogone de cette espèce dans une communication que j'ai faite dernièrement à la Société portugaise des sciences naturelles.

Campylopus flexuosus Brid. Je crois devoir rapporter à cette espèce, qui serait nouvelle pour le Portugal, um *Campylopus* que j'ai trouvé dans une touffe de *Dicranum scoparium* récolté par M. Gonçalo Sampaio à Ponte do Lima.

Pottia truncatula (L.) Ldb. Guimarães, fév. 1902. Paraît être assez fréquente en Portugal.

Pottia Starkeana (Hedw.) C. M. Collège de Campolide, fév. 1907.

Trichostomum flavo-virens Bruch. Guimarães, fév. 1902.

Timmiella barbula (Schw.) Lpr. Très commune à Cintra et aux environs de Setubal.

Aloina ambigua (B. E) Lpr. Setubal: au pied de la Serra de S. Luiz, avril 1907.

Tortella squarrosa (Brid.) Lpr. Commune aux environs de Setubal. Cintra. Torres Vedras: Cadriceira.

Fissidens Warnstorfii Fl. Setubal: dans une fontaine près des anciens convents de S. Paulo, stérile; nouveau pour la flore portugaise (1). Décembre 1906.

(1) Cf. *Bullet. de la Soc. Portug. de Sc. Nat.* Vol. I, fasc. I. 1907, p. 20.

Fissidens decipiens De Not. Setubal: Commenda, Brancanes. Je suis persuadé que cette plante n'est qu'une variété de *F. adianthoides* (L.) Hedw.

Fissidens serrulatus Brid. var. *Henriquesii* var. nov. Dans la collection des mousses de l'Université de Coimbre, j'ai trouvé un *Fissidens* stérile, étiqueté sous le nom de F. *polyphyllus* Wils. et récolté en janvier 1880 dans une mine à Eixo, près d'Aveiro, par M. le Dr. J. Henriques. Cette plante, qui n'appartient évidemment pas à *F. polyphyllus*, me paraît être une forme non décrite de *F. serrulatus* Brid. M. le Dr. Roth, à qui je dois déjà plusieurs services, a bien voulu examiner un petit échantillon de cette plante et m'a confirmé dans ma manière de voir. Je dédie cette variété nouvelle à M. le Dr. J. Henriques qui l'a découverte. En voici la description:

Fissidens serrulatus Brid. var. *Henriquesii* Luis. nov. var. Tiges molles et grêles de 10-12 centimètres de long, à feuilles un peu espacées et presque pas arquées à l'état sec, finement et irrégulièrement dentées, quelquefois crénelées, sur tout le pourtour.

Fissidens polyphyllus Wils. var. *Welwitschii* (Schp.) Guimarães: Rio Velho. Août 1902.

J'ai taché de montrer ailleurs que cette plante ne pouvait pas être considérée comme espèce autonome (1). Les exemplaires que j'ai récoltés, au mois d'août dernier, aux environs de Guimarães, m'ont confirmé dans cette manière de voir.

Je n'ai malheureusement pas encore pu lire le travail de Bottini sur cette question. Si j'en juge par la citation de M. J. Henriques (2), Bottini considère *F. polyphyllus* lui même comme une simple variété de *F. serrulatus* Brid.

Sans vouloir examiner ici cette question, j'ajouterai seulement que j'ai trouvé submergé dans une petite fontaine, à côté du *Rio Selho*, à *Guimarães* un bel exemplaire de *F. Welwitschii*, tandis que les parois de la fontaine, jusqu'au niveau de l'eau,

(1) Cf. *Bullet. Soc. Port. de Sc. Nat.*, I, p. 15.
(2) *Bolet. Soc. Brot.*, VII.

étaient recouvertes de *F. serrulatus*. WILSON regardait *F. polyphyllus* et F. *serrulatus* comme de simples variétés de *F. asplenioides*. J'ajouterai que Lindberg partageait lui aussi l'opinion que je défends dans l'herbier de l'Académie Polytechnique, revu par lui; je trouve, en effet, les exemplaires de cette plante avec l'étiquette: *F. polyphyllus* var. *Welwitschii*.

Grimmia leucophaea Grev. S. Fiel. Août 1906.

Racomitrium lanuginosum Brid. Parait être très commun en Portugal. Je l'ai rencontré en abondance au sommet de la *Serra da Gardunha*, à *Citania* près de *Guimarães*, au sommet de la *Penha* à Guimarães, à Cintra.

Ptychomitrium polyphyllum (Dicks.) Bruch. Guimarães: murs du cimetière, août. 1907.

Orthotrichum diaphanum (Gon.) Schrad. Setubal: arbres de l'Avenue, déc. 1906. Costa de Caparica: Val de Rosal, sur les oliviers, août 1906. Campolide, sur un palmier et sur les oliviers, mai 1907. Torres Vedras: Collegio do Barro, sept. 1907.

Orthotrichum tenellum Bruch. forma *propagulifera*. Setubal: Brancanes, avril 1907. C'est une forme singulière à feuilles munies de propagules cylindriques.

Epipterygium Tozzeri (Grev.) Ldb. Povoa de Lanhoso: Rendufinho, oct. 1897. C'est mon ami, M. GONÇALO SAMPAIO, qui a découvert cette intéressante petite plante, grêle 1-1 ½ cent. feuilles allongées à nervure et à marge décolorées.

Bryum badium Bruch. Guimarães, fev. 1902. Nouveau pour la flore portugaise.

Mnium ciliare (Grev.) Ldb.? J'ai trouvé dans l'herbier de l'Académie Polytechnique de Porto parmi des *Mnium affine*, deux curieux échantillons, que je crois devoir rapporter au *Mnium ciliare* Ldb Les dents des feuilles en forme de cils allongés, sont composées de 3, souvent de 4 cellules allongées. Cet exem-

plaire a été récolté par M. G. Sampaio, à S. Gens, Povoa de Lanhoso. Cette découverte est d'autant plus intéressante, que c'est, je crois, la première fois que cette plante a été observée au sud de l'Europe. Elle était connue de la Suède, du Caucase et des Vosges. C. Muller (1848) considérait *M. ciliare* comme une variété de *M. affine*. Je partage volontiers cette manière de voir.

b) PLEUROCARPES

Fontinalis antipyretica L. Les exemplaires que j'ai récoltés au sommet de la Gardunha, en août 1906, ainsi que dans l'*Ocreza*, près de Louriçal do Campo, avaient des feuilles à oreillettes très distinctes et les cellules plus régulières que dans le type.

Fontinalis squamosa L. Guimarães: Rio Selho, avril 1907.

Fontinalis squamosa L. var. *capillaris Luisier* var. n. Plante très élégante formant de longues touffes noires, brillantes, ressemblant à une chevelure; tiges molles, devisées en longs rameaux minces, cylindriques, presque filiformes; feuilles plus courtes et plus étroites que dans le type.

Cette belle variété croit en abondance sur les pierres du *Rio de Jogueiros* près de Felgueiras ou je l'ai récoltée au mois d'août 1907.

Cryphaea Lamyi C. M. Sur les pierres de l'Alpreada, au dessous de Castello Novo, août 1906.

Neckera pumila Hedw. Caldas do Gerez. Récoltée par M. le prof. J. Silva Tavares, en septembre 1906.

Neckera complanata (L.) Hüb. Je l'ai trouvée fructifiant en abondance à Cintra, sur les arbres au dessous du Castello dos Mouros, mars 1907.

Fabrania pusilla Raddi. Cette espèce est nouvelle pour le Portugal, Je l'ai récoltée sur un buis, en septembre 1906, à Outeiro do Bispo, près de Fundão. Quelques jours plus tard, je la découvrais, dans cette même localité, sur un vieux mur.

Acrocladium cuspidatum (L.) Ldb. Serra da Estrella, sept. 1906.

BIBLIOGRAPHIA

J. Nunes da Matta, lente da Escola Naval: *Taboa polytelica.* Lisboa, 1906.

As taboas que sob este titulo appareceram ha mezes, resolvem um grande numero dos problemas de navegação que a pratica de bordo exige.

Além das taboas de *ponto*, de *correcções de alturas de astro*, etc., communs á maioria das collecções de taboas congeneres, insere a nova publicação uma taboa especial que dá o nome ao livro.

Considerado o triangulo de posição: *zenith*, *polo* e *astro*, e em que a, δ, P e l representam respectivamente a altura verdadeira, declinação, angulo horario do astro e latitude do logar, a taboa polytelica resolve qualquer das formulas:

$$\operatorname{sen} a = \cos(l - \delta) - \cos l \cos \delta \times 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P$$

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P = \frac{\cos(l - \delta) - \operatorname{sen} a}{\cos l \cos \delta} = \frac{\operatorname{sen} a_m - \operatorname{sen} a}{\cos l \cos \delta} \quad (^1)$$

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P = \frac{\cos(l - \delta)}{\cos l \cos \delta} \quad (^2)$$

$$\cos(l - \delta) = \operatorname{sen} a + \cos l \cos \delta \times 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P$$

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} Z = \frac{\cos(l - a) - \operatorname{sen} \delta}{\cos l \cos a} \quad (^3)$$

$$\cos Z = \frac{\operatorname{sen} \delta}{\cos l} \quad (^4)$$

---

(1) a_m, altura meridiana.
(2) Supposto $a = 0$, isto é, o astro   horisonte racional.
(3) Z, azimuth do astro.
(4) Supposto $a = 0$

facilmente deduzidas, e que dão respectivamente:

— A altura verdadeira do astro, conhecido o seu horario (St. Hilaire);

— O angulo horario dada a altura (Sumner e Borda);

— O angulo horario do astro no nascimento e occaso verdadeiro;

— A latitude por altura circunmeridiana;

— O azimuth conhecida a altura;

— Idem no nascimento e occaso do astro.

Considerado por fim o triangulo espherico: *partida*, *polo* e *chegada*, comprehende-se facilmente que a mesma taboa polytetica possa resolver os problemas de navegação orthodromicos como: calculo das distancias; rumo inicial, etc.

Serve ainda a mesma taboa para calculo de distancias lunares, visto poder ser applicada á resolução de qualquer triangulo espherico que se considere.

*

É realmente engenhosa a forma por que o auctor conseguiu n'uma só taboa reunir os elementos indispensaveis para resoluções dos triangulos esphericos.

Dependendo essa resolução, de um modo geral, dos valores de senos e cosenos naturaes, e ainda dos logarithmos dessas funcções, o auctor dispoz as coisas de forma habil a poder com uma só taboa resolver a questão. Uma ligeira analyse sobre o modo de dispor os argumentos, leva-nos á immediata comprehensão do *engenho* que tanto facilita os calculos,

Os valores naturaes das funcções e seus logarithmos são dados até á quinta casa decimal, permittindo a columna das partes proporcionaes uma maior aproximação, o que decerto é mais que sufficiente para os calculos de bordo.

J. Baptista Ferreira.

Abel Fontoura da Costa e **Victor Hugo de Azevedo Coutinho**, lentes da Escola Naval: *Taboas nauticas*. Lisboa, 1907.

A *arte de navegar* constitue hoje, sem duvida, um dos assumptos que mais deve interessar o official de mar.

Se bem que, fundamentalmente, desde o apparecimento dos modernos processos de Sumner, Marcq St. Hilaire e Borda, pouco mais haja a exigir, não offerece duvida que a rapidez de execução dos calculos de bordo é objectivo que não convém descurar, tanto mais que se entrou no caminho das grandes velocidades horarias.

Navegar junto á costa empregando tabellas de facil manuseamento e que de prompto nos possam fornecer a posição do navio; escolher typo de calculo que com rapidez nos forneça, por observações astronomicas, o ponto no mar largo, taes são os fins que preoccupam aquelles que se dedicam ao estudo da sciencia nautica, prestando um alto serviço á navegação, serviço que se traduz, em ultima analyse, n'uma maior confiança nos resultados e até mesmo n'uma economia de tempo e de dinheiro.

Dia a dia e sobretudo nas grandes nações maritimas, como a Inglaterra, França e Allemanha, apparecem collecções de taboas nauticas, umas vezes *geraes* como a de que vimos dando noticia, outras *especiaes* servindo apenas á resolução de determinados problemas; e a febre leva a custosa bibliotheca, quando a curiosidade nos obriga a acompanhar esse movimento, aliás louvavel, do estudo de um dos ramos mais importantes da sciencia de navegar.

As taboas dos srs. Fontoura e Azevedo Coutinho inserem uma vasta bibliographia ácerca do que mais importante se tem publicado sobre o assumpto, fazendo um resumo das collecções que existem na bibliotheca da Escola Naval e nas dos auctores. Por essa noticia vemos existirem, pelo menos 1767 obras, prova incontestavel da importancia do assumpto.

As taboas nauticas de que vimos fallando acabam de ser publicadas em edição de uma nitidez perfeita que muito honra a industria nacional e obedecem, quanto á disposição, aos mais modernos preceitos adoptados em taboas congeneres extrangeiras, sendo de uma extraordinaria facilidade a procura dos elementos que ellas podem fornecer, e, se demoramos a nossa

attenção sobre este assumpto, é porque bem sabemos a importancia d'elle quando se trata do manuseamento das antigas taboas logarithmicas, não sendo raro os enganos a que uma má disposição pode dar origem.

*

Como já dissemos, as taboas dos srs. Fontoura e Azevedo Coutinho podem considerar-se *geraes*, por isso que, recorrendo a ellas, teem resolução todos os calculos de bordo. Substituem vantajosamente a collecção de Noire e outras usadas na marinha portugueza.

Com as taboas 1 a 11 são resolvidos os mais importantes problemas de navegação costeira; as restantes servem principalmente para os calculos astronomicos, permittindo a obtenção do ponto no mar por qualquer dos processos de Sumner, St. Hilaire e Borda; contudo os auctores, seguindo os preceitos mais modernos e geralmente adoptados, recommendam o methodo da altura para uso constante, pois que assim desligam o observador de uma condição indispensavel ao procurar a solução por qualquer dos outros methodos: o momento das circunstancias favoraveis.

As grandes velocidades horarias, d'onde deriva a urgente necessidade de calcular depressa, levam os auctores a recommendar a dispensa nas interpollações dos logarithmos e arcos: — convém mais, sem duvida alguma, ter um ponto no mar com o maximo arco de 2 milhas, do que procurar as grandes aproximações á custa de tempo, o que conduz, em grande numero de casos, a derrotas defeituosas com desperdicio de caminho.

Para conseguir uma mais rapida resolução pelo methodo de St. Hilaire, foi dada á formula geral do triangulo de posição, a seguinte forma:

$$\text{sem. vers}\, x = \text{sem. vers}\, P \cos l \cos \delta \sec (l - \delta)$$

$$\operatorname{cosec} a = \sec (l - \delta) \sec x$$

recorrendo ao auxiliar x. D'este modo e dentro de uma mesma taboa — a dos logarithmos das funcções trigonometricas — se obtem, por seis entradas, o valor da altura a, permittindo a dis-

posição especial da mesma taboa passar immediatamente *á vista* de log. sem. vers x a log. sec x.

Fazem parte da collecção as conhecidas taboas de PERRIN (azimuths) que os auctores apresentam sob uma disposição pouco vulgar e taboas para a determinação da latitude por circummeridiano, etc. etc.

J. BAPTISTA FERREIRA.

ADRIANO ANTHERO: *A Historia economica*. Porto.

Tem sido pobre a litteratura portugueza em obras de historia economica geral, podendo considerar-se ainda por fazer o estudo historico da vida economica nacional.

Contrasta esse nosso atraso com a existencia de obras de historia economica geral em outras litteratura, entre as quaes sobresahe a notavel obra de DÜHRING, *Kristische Geschichte der National-Oekonomie*.

Mais flagrante é esse contraste, se attendermos aos estudos historicos realisados nos diversos paizes a respeito da sua evolução economica; encontraremos em alguns d'elles trabalhos muito notaveis. Para não citar muitos, bastará fazer referencia ao vasto repertorio allemão da doutrina historica de ROSCHER, *Geschichte der National-Oekonomie in Deutschland;* aos notaveis artigos economicos da *Encyclopedia Britannica*, á bella obra italiana *Storia della Economia pubblica in Italia*, de PECCHIO, continuação, por assim dizer, dos 50 volumes de CUSTODI, que resumem toda a litteratura economica d'aquelle paiz; não podendo esquecer a propria Hespanha, que tem a sua *Historia* de COLMEIRO.

Contribue para preencher essa lacuna em Portugal a *Historia Economica*, que tem em via de publicação o sr. ADRIANO ANTHERO, professor do Instituto Industrial e Commercial do Porto.

Não se limitou o sr. ADRIANO ANTHERO a apresentar no seu trabalho o movimento economico dos diversos povos; busca a aproximação entre elles e a historia politica e social. Seguiu assim o distincto professor os bons modelos. O professor da Universidade de Géneve E. DE GIRARD, no prologo da sua *His-*

toire de l'Economie Sociale insurge-se contra o methodo de isolamento da narração dos factos, porque acha, e com razão, que se deve procurar as causas profundas para se reconhecer a reacção dos factos sobre as ideias e reciprocamente.

Na sua *Historia Economica* o sr. ADRIANO ANTHERO procura determinar as relações entre as fontes economicas e o estado social, esboçando assim quadros interessantes, como, por exemplo, o da acção dos italianos nos mercados bysantinos nos seculos X e XI.

É vastissimo o campo que o sr. ADRIANO ANTHERO intentou explorar mas tem provado nos volumes já publicados que não lhe falta coragem para levar a cabo empreza tão grandiosa.

A historia do movimento economico de Portugal está por fazer; possuimos já, é certo, preciosos elementos para se emprehender essa obra proveitosissima; resta, porém, compilar esses elementos e investigar outros que permittam documentar devidamente as diversas phases da evolução economica no nosso paiz.

Alguns dos periodos d'essa evolução exerceram, como se sabe, uma poderosa influencia nos destinos da humanidade.

Áquelles que versam assumptos economicos em Portugal compete contribuirem para o engrandecimento d'esse ramo da Historia patria.

B. CARQUEJA.

R. BAIRE: *Leçons sur la théorie générale des fonctions*. Tom. I. Paris, Gauthier-Villars, 1907.

Contém este volume a primeira parte das lições feitas pelo sr. BAIRE na Faculdade de Sciencias de Dijon. São nelle consideradas a theoria dos numeros irracionaes e dos limites, a differenciação e a integração das funcções de variaveis reaes, e as applicações do calculo integral á rectificação das curvas, á quadratura das superficies e á cubatura dos solidos.

É consideravel o numero dos obras onde estes assumptos teem sido tratados. Mas, o presente livro differe muito de todos os que teem sido consagrados aos referidos assumptos, pela forma original que o auctor deu á exposição que d'elles fez, introdu-

zindo algumas noções que até agora só eram empregadas em questões d'ordem mais elevada. Conseguiu assim conciliar o rigor indispensavel na exposição d'estas materias, com a maxima clareza e elegancia. Merece especial menção, em primeiro logar, o modo luminoso como é exposta a theoria dos numeros irracionaes e dos limites, introduzindo as noções de limitação superior e inferior, tirada da theoria das collecções de numeros. Esta maneira de estudar os numeros irracionaes tinha sido exposta pelo sabio auctor da obra em um opusculo intitulado: *Théorie des nombres irrationels*, publicado em 1905. Devemos tambem notar a maneira clara como é tratada a correspondencia entre as noções analyticas e as noções geometricas que as representam. Devemos enfim chamar a attenção para o modo como são tratadas as noções de differencial, de area plana e de volume.

Em resumo, no bello livro de que nos estamos occupando teem um modelo excellente a seguir os que teem por missão ensinar as theorias geraes da analyse.

G. T.

G. Fezzari: *Breve storia della Matematica. (Dai tempi antichi al Medio Evo)*. Sandron, Milano, 1907.

Ha em muitas escolas superiores extrangeiras cursos especialmente consagrados á historia das sciencias mathematicas. Como entre nós não existem cursos d'esta natureza, convem que cada professor na sua cadeira descreva a traços largos a historia da sciencia ou ramo de sciencia que ensina, para que não aconteça que individuos com diploma de um curso superior de sciencias mathematicas ou de sciencias physico-mathematicas desconheçam o papel importante que Archimedes, Appolonio, etc., na antiguidade, Galileu, Descartes, Newton, Huygens, etc., nos tempos modernos, desempenharam na fundação d'estas sciencias. O ensino assim feito é certamente desconexo, mas o alumno pode mais tarde dar unidade aos seus conhecimentos, lendo alguma obra consagrada à historia das referidas sciencias. Para esse fim pode servir-lhe muito bem aquella cujo titulo vimos de dar, porque é concisa, contem o que é essencial conhecer, e é escripta de modo a interessar o leitor.

O primeiro volume, que vem de ser publicado, é consagrado á historia das sciencias mathematicas nos tempos antigos e na edade media, isto é, no periodo que vae desde a origem desta sciencia até ao fim do seculo XV. É bem desejavel que o sabio auctor do livro publique com brevidade a continuação.

G. T.

M. D'OCAGNE: *Calcul graphique et Nomographie*. O Doin, Paris, 1907.

A casa editora de O. Doin, de Paris, vem de iniciar a publicação de uma Encyclopedia scientifica, que constará de 1000 volumes e que será mais vasta que todas as que actualmente existem. A direcção de parte d'esta Encyclopedia consagrada ás mathematicas applicadas, foi confiada ao bem conhecido professor da Escola de pontes e estradas de Paris M. D'OCAGNE. Constará de dezoito volumes, sendo tres consagrados á Sciencia do calculo, quatro á Analyse applicada, e os restantes á Geometria applicada.

Um dos volumes da parte relativa á Sciencia do calculo vem de ser publicado, e é consagrado ao Calculo graphico e á Nomographia. O seu auctor é mesmo M. D'OCAGNE, que para estes assumptos tem uma competencia especial, pois que desde muitos annos se tem occupado d'elles com successo. É mesmo a este sabio mathematico que é devida a organisação da Nomographia em corpo de doutrina, e o progresso rapido d'este ramo das sciencias mathematicas, que elle tem successivamente enriquecido com bellos e importantes trabalhos, consagrados uns á sua theoria, outros a especulações scientificas que n'esta theoria têem origem e outros finalmente ás suas applicações praticas. De alguns d'estes trabalhos deu-se noticia no *Jornal de sciencias mathematicas*.

O presente volume é dividido em duas partes: a primeira é consagrada ao Calculo graphico, isto é, á execução das operações sobre numeros por meio de traçados de segmentos de rectas que os representam; a segunda a Nomographia, isto é, á construcção de taboas graphicas ou abacos, por meio das quaes se resolvem immediatamente as equações.

Na primeira parte (p. 21 a 161) são considerados os methodos

graphicos para a execução das operações arithmeticas, para a resolução das equações algebricas e para a integração das funcções e das equações differenciaes. Na segunda parte (p. 161 a 383) é exposta, sem lacunas nem excessos, a parte essencial da Nomographia com numerosas applicações. Principia pela representação por linhas concorrentes, trata depois da representação por pontos alinhados, considera depois a representação por pontos cotados e termina por um resumo da theoria geral de todos os os modos possiveis de representação.

Contem ainda este volume algumas noções geraes de Geometria analytica, proprias para facilitar o estudo dos assumptos n'elle tratados, e uma bella e interessante lição com que o auctor inaugurou um curso livre que sobre os mesmos assumptos professou na Universidade de Paris em 1907.

G. T.

Annuaire pour l'an 1907 publié par le Bureau des longitudes. Paris, Gauthier-Villars.

Contém este volume, além das tabellas e informações habituaes, as seguintes noticias scientificas:

1.° *Diametro de Venus*, por Bouquet de la Grye.

2.° *Nota sobre a XV.ª conferencia da Associação geodesica internacional*, por Bouquet de la Grye.

3.° *Historia das ideias e das indagações sobre o Sol. Revelação recente da atmosphera inteira do astro*, por H. Deslandres.

INDEX

ANNAES SCIENTIFICOS

DA

ACADEMIA POLYTECHNICA

DO

PORTO

PUBLICADOS SOB A DIRECÇÃO

DE

F. Gomes Teixeira

VOLUME II — N.º 4.º

(Publicação official)

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1907